Таблица производных

1. $(C)' = 0,$
2. $(u^n)' = nu^{n-1}u', \quad (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u', \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2},$
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', \quad (e^u)' = e^u \cdot u',$
4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u},$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u',$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u',$
7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},$
8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u},$
9. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$
10. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$
11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2},$
12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$

$$(u+v)' = u' + v'. \; c \cdot u'(x).$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Определение производной

Определение 13.3. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x *называется предел отношения приращения функции* Δy *в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при условии, что* $\Delta x \to 0$.

Производная функции $y = f(x)$ *в данной точке* x *обозначается символом* $f'(x)$.

Итак,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (13.4)$$

Наряду с обозначением $f'(x)$ используются и другие обозначения:

$$y', \quad y'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Соответственно, в фиксированной точке x_0 производная обозначается:

$$y'|_{x=x_0} = y'(x_0) = f'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx}. \qquad (13.5)$$

Иногда оказывается целесообразным указывать переменную, по которой берется производная в виде индекса. Например, для функции $y = y(x)$ производная $y'(x)$ обозначается y'_x, а для функции $x = x(y)$ производная $x'(y)$ обозначается x'_y.

Пример 13.1. *Найти производную* $y = x^2$.

Р е ш е н и е: Находим приращение функции Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Разделив приращение на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, найдем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x.$$

Пример 14.1. $y = x^3$.

Р е ш е н и е:

- $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3$,
- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$,
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$,
- $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2$.

Пример 14.2. $y = \sqrt{x}$.

Р е ш е н и е:

- $f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$,
- $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$,
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \dfrac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$
  $= \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(C)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

$$n = \frac{1}{2}: \quad (\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = 1/2 \cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$n = -1: \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Пример 14.3. $y = x^5$.

Р е ш е н и е: $y' = (x^5)' = 5x^{5-1} = 5x^4$.

Пример 14.4. $y = \sqrt[7]{x^3}$.

Р е ш е н и е: $y' = (\sqrt[7]{x^3})' = (x^{3/7})' = 3/7x^{3/7-1} = \dfrac{3}{7\sqrt[7]{x^4}}$.

Пример 14.5. $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Р е ш е н и е: $y' = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

Пример 14.6. $y = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{x^2}$.

Р е ш е н и е: $y' = \left(\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x^2}\right)' = (x^{-1} - 2x^{-3/2})' = -x^{-2} + 3x^{-5/2} =$
$= -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$.

Пример 14.7. $y = ax^{-5}$.

Р е ш е н и е: $y' = (ax^{-5})' = a(x^{-5})' = -5ax^{-6} = \dfrac{5a}{x^6}$.

Пример 14.8. $y = \sqrt[n]{x}$.

Р е ш е н и е: $y' = (\sqrt[n]{x})' = (x^{1/n})' = 1/nx^{1/n-1} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Пример 14.9. $y = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$.

Р е ш е н и е: $y' = (\sqrt{\sqrt[3]{x}})' = (x^{1/6})' = 1/6x^{-5/6} = \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$.

Пример 14.10. $y = x^3\sqrt[5]{x}$.

Р е ш е н и е: $y' = (x^3\sqrt[5]{x})' = (x^{16/5})' = 16/5x^{11/5} = \dfrac{16x^2\sqrt[5]{x}}{5}$.

Пример 14.11. $y = \sin x + \cos x$.

Р е ш е н и е: $y' = (\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x$.

Пример 14.12. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Р е ш е н и е:

$$y' = \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)' = \frac{(\operatorname{tg} x)'x - x'\operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x \cos^2 x}.$$

Пример 14.13. $y = \operatorname{ctg} x \cdot \arccos x$.

Р е ш е н и е:

$$y' = (\operatorname{ctg} x \cdot \arccos x)' = (\operatorname{ctg} x)' \arccos x + (\arccos x)' \operatorname{ctg} x =$$
$$= -\frac{\arccos x}{\sin^2 x} - \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 14.14. $y = \log_2 x \cdot 2^x$.

Р е ш е н и е: $y' = (\log_2 x)' 2^x + (2^x)' \log_2 x = \dfrac{2^x}{x \ln 2} + 2^x \cdot \ln 2 \cdot \log_2 x$.

Пример 14.15. $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$.

Р е ш е н и е: $y' = (\dfrac{(e^x)' \ln x - (\ln x)' e^x}{\ln^2 x} = \dfrac{e^x(x \ln x - 1)}{x \ln^2 x}$.

Пример 14.16. $y = \cos^3 x$.

Р е ш е н и е: $y' = \underbrace{3\cos^2 x}_{\text{производная от степени}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{\text{производная от косинуса}} =$
$= -3 \sin x \cos^2 x$.

Пример 14.17. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Р е ш е н и е: $y' = \underbrace{\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}}_{\text{производная от корня}} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\cos^2 x}}_{\text{производная от тангенса}} = \dfrac{1}{2\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

Пример 14.18. $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} - (\arcsin x)^3$.

Р е ш е н и е: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}} \dfrac{1}{1+x^2} - 3(\arcsin x)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Пример 14.19. $y = \lg \sin x$.

Р е ш е н и е: $y' = \dfrac{1}{\ln 10 \cdot \sin x} \cdot \cos x$.

Пример 14.20. $y = \operatorname{arcctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

Р е ш е н и е: $y' = -\dfrac{1}{1+\ln^2 x}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}\dfrac{1}{1+x^2}$.

Пример 14.21. $y = (e^{5x} - \operatorname{ctg} 4x)^5$.

Р е ш е н и е: $y' = 5(e^{5x} - \operatorname{ctg} 4x)^4 \cdot \left(5e^{5x} + \dfrac{4}{\sin^2 4x}\right)$.

Пример 14.22. $y = \cos e^{3x}$.

Р е ш е н и е: $y' = -\sin e^{3x} \cdot e^{3x} \cdot 3 = -3e^{3x} \sin e^{3x}$.

Пример 14.23. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{-x}$.

Р е ш е н и е: $y' = \dfrac{1}{1-x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{2(1-x)\sqrt{-x}}$.

Пример 14.24. $y = \ln \dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

Р е ш е н и е:
$$y' = (\ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3})' = (5\ln(x-2) - 3\ln(x+1))' = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+1}.$$

Пример 14.25. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$.

Р е ш е н и е: $y' = (2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2)' =$
$$= 2^{\arcsin 3x} \ln 2 \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 + 2(1 - \arccos 3x)\frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3.$$

Производная показательной функции $y = a^x$. Найдем приращение функции

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Тогда на основании рассмотренного в лекции 9 предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

получим

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \ln a. \qquad (13.10)$$

В частности, при $a = e$ получим

$$(e^x)' = e^x. \qquad (13.11)$$

Производная логарифмической функции $y = \log_a x$
Найдем приращение функции

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Сделаем следующее тождественное преобразование:

$$\frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}}.$$

Устремив $\Delta x \to 0$, на основании рассмотренного в лекции 9 предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a},$$

найдем

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}. \tag{13.12}$$

В частности, при $a=e$ получим

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{13.13}$$

Производная функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$

Найдем приращение функции

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

Следовательно,

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Записав этот предел в виде

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

получим

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{13.14}$$

так как первый сомножитель на основании теоремы о первом замечательном пределе равен единице.

Аналогично можно доказать, что

$$(\cos x)'=-\sin x. \tag{13.15}$$

14.1. Производная суммы

Теорема 14.1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке, то в этой точке производная их суммы существует и равна сумме производных слагаемых.*

$$(u+v)' = u' + v'. \tag{14.1}$$

Доказательство. Дадим аргументу x функции $y(x) = u(x) + v(x)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = (u(x+\Delta x) - u(x)) + (v(x+\Delta x) - v(x)) = \Delta u + \Delta v.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

14.2. Производная произведения

Теорема 14.2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке, то в этой точке производная их произведения существует и находится по формуле*

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + v'\cdot u. \tag{14.2}$$

Доказательство. Дадим аргументу x функции $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = (u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v) - u\cdot v.$$

Открыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$\Delta y = v\cdot\Delta u + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v.$$

Следовательно,

$$(u\cdot v)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u + u\cdot\Delta v + \Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}.$$

Разделив числитель на знаменатель, представим последний предел в виде суммы трёх слагаемых:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v \right) = u' \cdot v, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right) = v' \cdot u,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \right) = u' \cdot 0 = 0.$$

В третьем слагаемом

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0,$$

так как из дифференцируемости функции v следует её непрерывность.

Сложив три слагаемые, получим искомую формулу (14.2). Теорема доказана.

14.3. Производная частного

Теорема 14.3. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке x, причём $v(x) \neq 0$, то в этой точке производная их частного существует и находится по формуле*

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \tag{14.4}$$

14.5. Производная сложной функции

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$. Тогда y есть сложная функция переменной x, а переменная u – промежуточный аргумент: $y = y(u) = y(u(x))$.

Как найти её производную? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 14.4. *Если функция $u = u(x)$ имеет производную u'_x в точке x, а функция $y = y(u)$ имеет производную y'_u в соответствующей точке u, то сложная функция $y = y(u(x))$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по формуле*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{14.12}$$

Пример 14.1. *Продифференцируйте функцию* $y = \sin^3 x$.

Решение:

$$y = u^3,\ u = \sin x,\quad y' = (u^3)'_u \cdot (\sin x)'_x = 3u^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

Пример 14.2. *Продифференцируйте функцию* $y = \sin x^3$.

Решение:

$$y = \sin u,\ u = x^3,\quad y' = (\sin u)'_u \cdot (x^3)'_x = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

При достаточном навыке буква u для промежуточного аргумента опускается. Вот как находятся производные функций, рассмотренных выше

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x(\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x\ ,$$

$$(\sin x^3)' = \cos x^3 \cdot (x^3)' = 3x^2 \cos x^3.$$

$$(\arcsin 5x)' = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5,$$

$$(\sqrt{\operatorname{arcctg} 3x})' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} 3x}} \cdot \frac{-1}{1+(3x)^2} \cdot 3,$$

$$\left(\cos\frac{1}{x}\right)' = -\sin\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2},$$

$$\left(2^{\operatorname{tg}\ln x}\right)' = 2^{\operatorname{tg}\ln x} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \ln x}\frac{1}{x},$$

$$(\operatorname{ctg}^3\sqrt{2x-x^2})' =$$

$$3\operatorname{ctg}^2\sqrt{2x-x^2} \cdot \frac{-1}{\sin^2\sqrt{2x-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot (2-2x).$$

Пример 14.3. *Найти производную функции*

$$y = 2^{\sin^2 x^3} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\ln^2(x+3)}.$$

Р е ш е н и е:

$$y' = 2^{\sin^2 x^3} \ln 2 \cdot 2 \sin x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + 2^{\sin^2 x^3} \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}} +$$

$$+ \frac{\ln^2(x+3) \dfrac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{x}} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 2 \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\ln^4(x+3)} =$$

$$= 2^{\sin^2 x^3} \left(3x^2 \ln 2 \cdot \sin 2x^3 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{\ln^3(x+3)} \left(\frac{\ln(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{x}} - \frac{2 \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{x+3} \right).$$

Логарифмическая производная

Пусть дана некоторая дифференцируемая функция $y = f(x)$. Прологарифмируем обе части этого выражения:

$$\ln y = \ln f(x).$$

А теперь продифференцируем его по x, помня, что $y = f(x)$:

$$(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \Longrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'_x, \text{ откуда}$$

$$y' = y(\ln f(x))' = f(x)(\ln f(x))'. \tag{15.1}$$

Определение 15.1. *Операция, состоящая в последовательном применении к равенству $y = f(x)$ сначала логарифмирования, а затем дифференцирования, называется логарифмическим дифференцированием, а производная, определяемая по формуле (15.1) – логарифмической производной.*

С помощью логарифмического дифференцирования мы легко можем вывести формулу (13.7), которая ранее была дана без вывода:

$$y = x^n \Longrightarrow \ln y = n \ln x \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = \frac{n}{x} \Longrightarrow y' = (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Производная показательно-степенной функции.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции. Тогда функция $y = u(x)^{v(x)}$ называется показательно-степенной. Её производная может быть найдена также с помощью логарифмического дифференцирования:

$$\begin{aligned}&y = u(x)^{v(x)} \Longrightarrow \ln y = v \ln u \Longrightarrow\\ &\Longrightarrow \frac{1}{y}y' = v' \ln u + \frac{v}{u}u' \Longrightarrow y' = (u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v}{u}u'\right).\end{aligned}$$

Пример 15.1. *Найти производную функции $y = (\sin x)^{\cos x}$.*

Р е ш е н и е:

$$y' = (\sin x^{\cos x})' = \sin x^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right).$$

Пример 15.1. $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$.

Р е ш е н и е: $\ln y = \ln(\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \Longrightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln\sin x$.

Дифференцируем обе части последнего равенства:

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln\sin x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.

Отсюда, умножив обе части последнего равенства на $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x}$, найдем:

$y' = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x} \left(\frac{\ln\sin x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{ctg} x \right)$.

Логарифмическое дифференцирование также удобно использовать, когда функция задаётся в виде произведения и частного нескольких степенных выражений.

Пример 15.2. *Найти производную функции* $y = \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}}$.

Р е ш е н и е:

$$\ln y = \ln \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}} = \ln\sin x^{\cos x} +$$

$$+ \ln \sqrt[3]{2\ln x} - \ln 2^{\operatorname{tg} x} - \ln \sqrt[4]{\arcsin x^3} =$$

$$= \cos x \ln\sin x + \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln\ln x - \operatorname{tg} x \ln 2 - \frac{1}{4}\ln\arcsin x^3 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln\sin x + \frac{1}{3x\ln x} - \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3x^2}{4\arcsin x^3 \sqrt{1-x^6}} \Longrightarrow$$

$$y' = \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{\operatorname{tg} x} \sqrt[4]{\arcsin x^3}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln\sin x + \frac{1}{3x\ln x} - \frac{\ln 2}{\cos^2 x} - \frac{3x^2}{4\arcsin x^3 \sqrt{1-x^6}} \right).$$

Пример 15.2. $y = \dfrac{x^2(x-1)^3\sqrt{2x+3}}{(3x-4)^2\sqrt[4]{3x+2}}$.

Р е ш е н и е:

$$\ln y = 2\ln x + 3\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+3) - 2\ln(3x-4) - \frac{1}{4}\ln(3x+2) \Rightarrow$$

$$(\ln y)'_x = \frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{2(2x+3)} - \frac{2\cdot 3}{3x-4} - \frac{3}{4(3x+2)} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{x^2(x-1)^3\sqrt{2x+3}}{(3x-4)^2\sqrt[4]{3x+2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2x+3} - \frac{6}{3x-4} - \frac{3}{4(3x+2)}\right).$$

Вычислить производную заданной функции, непосредственно как частного, оказалось бы значительно сложнее.

15.2. Производная функции, заданной параметрически

Параметрическое задание функции и примеры такого задания приводились нами в лекции 3. Напомним, что функция задаётся параметрически, если она определяется через параметр t по закону:

$$\begin{cases} y = y(t), \\ x = x(t). \end{cases}$$

Будем считать $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемыми функциями параметра t и, следовательно, непрерывными. Отсюда следует, что если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta t \to 0$.

Найдем

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \Big/ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Таким образом, производная функции, заданной параметрически, определяется формулой:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{15.2}$$

Пример 15.3. *Найти производную функции*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

график которой называется циклоидой (рис. 27).

Р е ш е н и е: По формуле (15.2):

$$y'_x = \frac{a(1 - \cos t)'}{a(t - \sin t)'} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2 \sin \dfrac{t}{2} \cos \dfrac{t}{2}}{2 \sin^2 \dfrac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Пример 15.5.

$$\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Пользуемся формулой (15.2):

$$y'_x = \frac{(\sin^2 t)'_t}{(\cos^2 t)'_t} = -1.$$

Производная неявной функции

Напомним, что функция называется неявной, неявно-заданной, если она определяется выражением $F(x,y)=0$. В каждом конкретном случае, продифференцировав такое выражение по x, считая y функцией x, получим линейное уравнение для производной $y' = y'_x$, из которого её и определим.

Пример 15.4. *Найти производную y' функции, заданной неявно*

$$x\sin y - y^2\ln x = 0.$$

Р е ш е н и е:

$$(x\sin y - y^2\ln x)'_x = \sin y + x\cos y\cdot y' - 2yy'\ln x - \frac{y^2}{x} = 0.$$

Из полученного уравнения находим:

$$y' = \frac{y^2 - x\sin y}{x(x\cos y - 2y\ln x)}.$$

Пример 15.3. $y^2\cos x = a^2\sin 3x$.

Р е ш е н и е: Дифференцируем обе части, считая y функцией x:

$$2y\cdot y'\cos x - y^2\sin x = 3a^2\cos 3x \Rightarrow y' = \frac{3a^2\cos 3x + y^2\sin x}{2y\cos x}.$$

Пример 15.4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Р е ш е н и е: Дифференцируем обе части, считая y функцией x:

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0 \Rightarrow y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

Геометрические приложения производной

Геометрические представления производной основаны на её геометрическом смысле, установленном нами в лекции 13.

Получим на основании этого уравнение касательной T к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ (рис. 98).

Уравнение любой прямой L, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$, с заданным коэффициентом k получено в лекции 3: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, как мы установили в лекции 13, угловой коэффициент $k_T = y'(x_0) = f'(x_0)$. Тогда $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ и уравнение искомой касательной T будет:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{15.3}$$

Как известно, если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_1 \cdot k_2 = -1$. Тогда если угловой коэффициент нормали N в точке $M_0(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ обозначить k_N, то он будет равен $k_N = -\dfrac{1}{k_T} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$, следовательно, уравнение нормали N в точке $M_0(x_0; y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ примет вид:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{15.4}$$

Определим теперь угол θ между двумя кривыми λ_1 и λ_2 в точке их пересечения (рис. 99). Очевидно, что этот угол равен углу между касательными T_1 и T_2 к кривым λ_1 и λ_2, проведённым в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$.

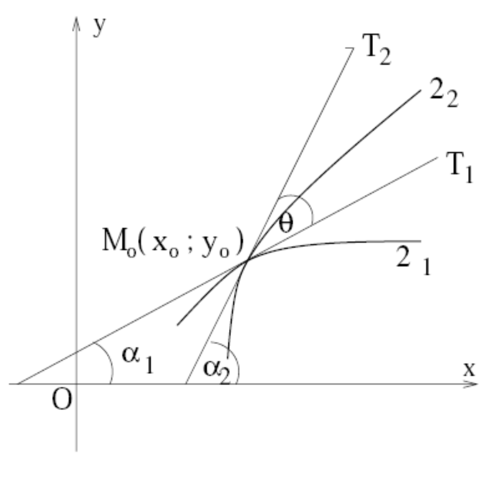

Рис. 99. *Угол между двумя кривыми*

Очевидно, что $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$. Откуда

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{M_0}.$$

Следовательно,

$$\theta = \operatorname{arctg}\left.\frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' \cdot y_2'}\right|_{x=x_0}. \tag{15.5}$$

Пример 15.5. *Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;4)$.*

Р е ш е н и е: $x_0 = 2$, $y_0 = f(x_0) = 4$. По (15.3) и (15.4) имеем уравнение искомой касательной T:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Longrightarrow y = 4x - 4$$

и нормали N:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Longrightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{9}{2}.$$

Пример 15.6. *Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $f(x) = y = x^3 - 2x^2 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.*

Р е ш е н и е: В точке $x_0 = 1$ находим значения функции и её производной:

$$f(x_0) = y_0 = f(1) = 2,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x, \quad y'(x_0) = y_0' = f'(1) = -1.$$

Подставим теперь $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ и $y_0' = -1$ в уравнения касательной (15.3) и нормали (15.4):

уравнение касательной:
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = 2 - (x - 1) \Rightarrow x + y - 3 = 0,$
уравнение нормали:
$y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + (x - 1) = 0 \ \Rightarrow x - y + 1 = 0.$

Пример 15.7. *Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} y = t^3, \\ x = t^2 \end{cases}$$

в точке со значением параметра $t_0 = 2$.

Решение: В точке, где $t_0 = 2$, находим значения x, y и производной:

$$x_0 = x(t_0) = 4,$$
$$y_0 = y(t_0) = 8,$$
$$y'_x(t) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t \Rightarrow y'_x(t_0) = 3.$$

Следовательно, уравнения искомых кривых будут:

уравнение касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y = 8 + 3(x - 4) \Rightarrow 3x - y - 4 = 0,$$

уравнение нормали:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y = 8 - \frac{1}{3}(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x + 3y - 28 = 0.$$

15.5. Приложение понятия производной к физическим задачам

Пример 15.7. *Точка движется прямолинейно со скоростью, определяемой законом $s = \sqrt{t}$. Показать, что движение замедленное.*

Р е ш е н и е: Если $s = \sqrt{t}$, то скорость $v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ с ростом времени уменьшается; это означает, что движение замедленно.

Пример 15.8. *Зависимость количества вещества, полученного в химической реакции, от времени определяется формулой $Q = a(1 + be^{-kt})$. Определить скорость реакции.*

Р е ш е н и е: Скорость реакции $\dfrac{dQ}{dt} = -abke^{-kt}$. Можно эту скорость выразить через Q. Действительно, из формулы $Q = a(1 + be^{-kt})$ имеем $abe^{-kt} = Q - a$. Следовательно, $\dfrac{dQ}{dt} = k(a - Q)$.

Пример 15.9. *Две точки движутся по одной прямой s по законам $s_1 = 100 + 5t$ и $s_2 = t^2/2$. С какой скоростью они будут удаляться друг от друга в момент встречи? Размерности времени и пути – секунды и метры.*

Р е ш е н и е: В момент встречи:

$$s_1 = s_2 \Rightarrow 100 + 5t = t^2/2 \Rightarrow t^2 - 10t - 200 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет один положительный корень $t = 20$. Находим скорости точек в момент встречи:

$$v_1(t) = \frac{ds_1}{dt} = 5 \text{ м/с}, v_2(t) = \frac{ds_2}{dt} = t \Rightarrow v_2(20) = 20 \text{ м/с}.$$

Следовательно, скорость расхождения $v_2 - v_1 = 15$ м/с.

Пример 15.10. *Количество электричества (в кулонах), протекающее через проводник, определяется законом $Q = 2t^2 + 3t + 1$. Найдите силу тока в конце 3 секунды.*

Р е ш е н и е: Сила тока $J = \dfrac{dQ}{dt} = 4t + 3$. При $t = 3$ $J = 15$ Кл/с=15А.