РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 1

Линейные пространства

Берков Николай Андреевич

11 февраля 2023г

Определение линейного пространства

Понятие линейного пространства относится к числу одних из основных понятий в линейной алгебре. Формально мы в первом семестре многократно встречались с понятием линейного пространства. Например, при изучении общего решения систем линейных однородных алгебраических уравнений, или геометрических векторов на плоскости или в пространстве.

Определение линейного пространства

Определение 17.1. (*Аксиоматика линейного пространства*). *Непустое множество* $\mathbb{V}$ *элементов* $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ *любой природы, называемых векторами, называется линейным, или векторным пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *В* $\mathbb{V}$ *определены две операции: сложение векторов* $\overline{x} + \overline{y}$ *и умножение вектора* $\overline{x}$ *на скаляр* α *– так, что множество* $\mathbb{V}$ *замкнуто относительно этих операций:*
   1) $\forall\, \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}: \quad \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$;
   2) *для любого числа* α *и любого элемента* $\overline{x} \in \mathbb{V}$ *определён элемент* $\alpha\overline{x} \in \mathbb{V}$ *(произведение элемента* $\overline{x}$ *на число* α*).*
2. *Причём эти операции обладают следующими свойствами:*
   1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ *(коммутативность сложения);*
   2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ *(ассоциативность сложения);*
   3) *в* $\mathbb{V}$ *существует нулевой элемент (нуль)* $\overline{0} \in \mathbb{V}$*, такой, что* $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}\ \forall \overline{x} \in V$ *(существование нуля);*
   4) *для каждого элемента* $\overline{x} \in \mathbb{V}\ \exists$ *элемент* $(\overline{-x}) \in \mathbb{V}$*, называемый противоположным элементу* $\overline{x}$*, такой, что* $\overline{x} + (\overline{-x}) = \overline{0}$*;*

5) $1 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}$ *(умножение на 1 не изменяет элемент);*

6) $\lambda(\mu\overline{\mathbf{x}}) = (\lambda\mu)\overline{\mathbf{x}}$ *(умножение на число ассоциативно);*

7) $\lambda(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \lambda\overline{\mathbf{x}} + \lambda\overline{\mathbf{y}}$ *(дистрибутивность относительно суммы элементов);*

8) $(\lambda + \mu)\overline{\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}} + \mu\overline{\mathbf{x}}$ *(дистрибутивность относительно суммы числовых множителей).*

Условия 1-8 называются *аксиомами* линейного пространства. Знак равенства, поставленный между векторами, означает, что в левой и правой частях равенства представлен один и тот же элемент множества $\mathbb{V}$, такие векторы называются равными.

Определение 17.1. (*Аксиоматика линейного пространства*). *Непустое множество V элементов $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ любой природы, называемых векторами, называется линейным, или векторным пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *В V определены две операции: сложение векторов $\overline{x}+\overline{y}$ и умножение вектора $\overline{x}$ на скаляр α – так, что множество V замкнуто относительно этих операций:*

   1) $\forall\ \overline{x}, \overline{y} \in V: \quad \overline{x}+\overline{y} \in V;$
   2) *для любого числа α и любого элемента $\overline{x} \in V$ определён элемент $\alpha\overline{x} \in V$ (произведение элемента $\overline{x}$ на число α).*

2. *Причём эти операции обладают следующими свойствами:*

   1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ *(коммутативность сложения);*
   2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ *(ассоциативность сложения);*
   3) *в V существует нулевой элемент (нуль) $\overline{0}$ такой, что $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}\ \forall\,\overline{x} \in V$ (существование нуля);*
   4) *для каждого элемента $\overline{x} \in V\ \exists$ элемент $(\overline{-x}) \in V$, называемый противоположным элементу $\overline{x}$, такой, что $\overline{x}+(\overline{-x})=\overline{0}$;*
   5) $1 \cdot \overline{x}=\overline{x};$
   6) $\lambda(\mu\overline{x})=(\lambda\mu)\overline{x};$
   7) $\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y};$
   8) $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}.$

В определении линейного пространства операция умножения вектора на число введена для действительных чисел. Такое пространство называют линейным пространством над полем действительных (вещественных) чисел, или, короче, вещественным линейным пространством.

В определении линейного пространства операция умножения вектора на число введена для действительных чисел. Такое пространство называют линейным пространством над полем действительных (вещественных) чисел, или, короче, вещественным линейным пространством.

Если в определении вместо поля $\mathbb{R}$ действительных чисел взять поле комплексных чисел $\mathbb{Z}$, то получим линейное пространство над полем комплексных чисел, или, короче, комплексное линейное пространство.

В качестве числового поля можно выбрать и поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, при этом получим линейное пространство над полем рациональных чисел.

Далее, если не оговорено противное, будут рассматриваться вещественные линейные пространства.

Примеры линейных пространств.

Пример 17.1. *Проверить является ли линейным пространством множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычными арифметическими операциями сложения и умножения.*

►1. Проверяем замкнутость данного множества.
Если $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow 1)\ \overline{x}+\overline{y} \in \mathbb{R}$ и $2)\ \alpha\overline{x} \in \mathbb{R}$. Т.е. множество замкнуто относительно операций сложения и умножения.

2. Справедливость всех восьми аксиом следует из определения арифметических операций над действительными числами.

Свойства

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ 2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ 3) $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}\ \forall\overline{x}\in V$

4) $\overline{x}+(\overline{-x})=\overline{0}$ 5) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$; 6) $\lambda(\mu\overline{x})=(\lambda\mu)\overline{x}$;

7) $\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$; 8) $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$.

Ответ: Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с обычными арифметическими операциями сложения и умножения является линейным пространством. ◄

Пример 17.2. *Проверить является ли линейным пространством множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с обычными арифметическими операциями сложения и умножения в области натуральных чисел.*

►1. Проверяем замкнутость данного множества:

1) Если $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$.

2) Если $x \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}$, то $x \cdot \alpha \in \mathbb{N}$.

Т.е. множество замкнуто относительно операций сложения и умножения.

2. Проверяем выполнения аксиом 1-8. Очевидно, что первые две аксиомы выполняются. Но множество натуральных чисел не содержит нуль, поэтому третья аксиома не выполняется. Кроме того и четвёртая аксиома не выполняется, т.к.для любого натурального числа x нет противоположного.

1) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ 2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$ 3) $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}\ \forall \overline{x} \in V$

Следовательно, данное множество не является линейным пространством. ◄

Пример 17.3. *Проверить является ли линейным пространством множества векторов (направленных отрезков) на прямой V_1, на плоскости V_2, в пространстве V_3 с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число.*

►Обозначим V_1, V_2, V_3 — множества векторов (направленных отрезков) на прямой, на плоскости, в пространстве соответственно с обычными операциями сложения векторов и умножения векторов на число.

1. Очевидно, что данные множества замкнуты.

1) При $k = 1, 2, 3$ сумма двух векторов $\overline{x} \in V_k$ и $\overline{y} \in V_k$ является вектором $\overline{z} = \overline{x} + \overline{y} \in V_k$.

2) При $k = 1, 2, 3$, $\forall\, \overline{x} \in V_k$ и $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ $\overline{x} \cdot \alpha \in V_k$.

2. Выполнение аксиом 1-8 линейного пространства следует из курса аналитической геометрии. Следовательно, множества V_1, V_2, V_3 являются вещественными линейными пространствами. Вместо свободных векторов можно рассмотреть соответствующие множества радиус-векторов. Например, множество векторов на плоскости, имеющих общее начало, т.е. отложенных от одной фиксированной точки плоскости, является вещественным линейным пространством.

Пример 17.4. *Проверить является ли линейным пространством множество $\mathbb{R}_n$ матриц-столбцов размером $n \times 1$ с операциями сложения матриц и умножения матриц на число.*

►1. Очевидно, что данные множества замкнуты.

1) Если $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}_n$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}_n$, то $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)^T \in \mathbb{R}_n$.

2) Если $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}_n$, то $\alpha \cdot \overline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)^T \in \mathbb{R}_n$.

Аксиомы 1-8 линейного пространства для этого множества выполняются. Нулевым вектором в этом множестве служит нулевой столбец $\overline{O} = (0, 0, \ldots, 0)^T$. Противоположным для элемента $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ является элемент $(\overline{-x}) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)^T \in \mathbb{R}_n$.

Следовательно, множество $\mathbb{R}_n$ является вещественным линейным пространством. Аналогично, множество $\mathbb{R}_n$ — множество строк размеров $1 \times n$ является линейным пространством. ◄

Пример 17.5. *Проверить является ли линейным пространством множество $M_{m\times n}(R)$ всех матриц имеющих m строк и n столбцов с действительными элементами и стандартными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.*

►Пусть $\overline{A}, \overline{B} \in M_{m\times n}(R)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\overline{A} + \overline{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m21} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in \underline{M_{mn}(R)},$$

$$\alpha\overline{A} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \in \underline{M_{mn}(R)}.$$

множество $M_{m\times n}(R)$ всех матриц имеющих m строк и n столбцов

Нетрудно доказать, что все остальные аксиомы линейного пространства выполняются.

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ *(коммутативность сложения);*
2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ *(ассоциативность сложения);*
3) *в* V *существует нулевой элемент (нуль)* $\overline{0}$ *такой, что* $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}\ \forall\overline{x}\in V$ *(существование нуля);*
4) *для каждого элемента* $\overline{x}\in V$ $\exists$ *элемент* $(\overline{-x})\in V$, *называемый противоположным элементу* $\overline{x}$, *такой, что* $\overline{x}+(\overline{-x})=\overline{0}$;
5) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$;
6) $\lambda(\mu\overline{x})=(\lambda\mu)\overline{x}$;
7) $\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$;
8) $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$.

$$\overline{0}=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{pmatrix},\quad \overline{-A}=\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\dots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\dots&-a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\-a_{m1}&-a_{m2}&\dots&-a_{mn}\end{pmatrix}$$

Ответ: Данное множество является линейным пространством. ◄

Пример 17.6. *Проверить является ли линейным пространством множество решений системы n линейных однородных алгебраических уравнений $Ax = 0$, с m неизвестными.*

►Обозначим $\mathbb{L}$ — множество решений однородной системы $Ax = 0$ линейных алгебраических уравнений с n неизвестными (где A — действительная матрица системы) с операциями сложения матриц и умножения матриц на число $\alpha \in \mathbb{R}$.

Заметим, что эти операции действительно определены на множестве $\mathbb{L}$.

Из свойства решений однородной системы следует, что если $Ax_1 = 0$ и $Ax_2 = 0 \Rightarrow \vee C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$C_1 A(x_1) + C_2 A(x_2) = 0 \Rightarrow A(C_1 x_1 + C_2 x_2) = 0.$$

Поэтому множество решений однородной системы является веще ственным линейным пространством. ◄

Замечание 17.1. *Множество $Ax = b$ решений неоднородной системы $Ax = b$, $b \neq 0$ не является линейным пространством, т.к. вектор $\overline{0}$ не является решением неоднородной системы $Ax = b$.*

Пример 17.7. Обозначим $\mathbb{P}(C)$ *— множество многочленов одной переменной с комплексными коэффициентами. Доказать, что* $\mathbb{P}(C)$ *является линейным пространством.*

►Операции сложения многочленов и умножения многочлена на число, рассматриваемое как многочлен нулевой степени, определены и удовлетворяют аксиомам 1-8 (в частности, нулевым вектором является многочлен, тождественно равный нулю).

Поэтому множество P(C) является линейным пространством над полем комплексных чисел.

Множество $P(t)$ многочленов с действительными коэффициентами также является линейным пространством (но, разумеется, над полем действительных чисел). ◄

Пример 17.8. *Множество $P_n(t)$ многочленов степени не выше, чем n, с действительными коэффициентами является вещественным линейным пространством.*

►Пусть $\overline{x}, \overline{y} \in P_n(t)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\overline{x} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$ и $\overline{y} = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n$.

Определим сумму векторов и произведение вектора на число обычными равенствами:

$$\overline{x} + \overline{y} = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \ldots + (a_n + b_n)t^n \in P_n(t),$$

$$\alpha\overline{x} = \alpha a_0 + \alpha a_1 t + \alpha a_2 t^2 + \ldots + \alpha a_n t^n \in P_n(t).$$

Очевидно,что при таком определении суммы векторов и произведения вектора на действительное число, все аксиомы линейного пространства выполняются.

При $\alpha = 0$ получаем нулевой вектор

$$\overline{0} = 0 + 0t + 0t^2 + \ldots + 0t^n.$$

Вектор противоположный вектору $\overline{x}$, равен

$$\overline{-x} = -a_0 - a_1 t - a_2 t^2 - \ldots - a_n t^n.$$

Тем самым доказано, что множество $P_n(t)$ многочленов степени не выше, чем n, с действительными коэффициентами является вещественным линейным пространством. ◄

Замечание 17.2. *Множество многочленов степени n не является линейным пространством, так как сумма таких многочленов может оказаться многочленом меньшей степени, не принадлежащим рассматриваемому множеству.*

Множество всех многочленов степени не выше, чем n, с положительными коэффициентами также не является линейным пространством, поскольку при умножении такого многочлена на отрицательное число получим многочлен, не принадлежащий этому множеству.

Пример 17.9. $\mathbb{C}$ — *множество действительных функций, определённых и непрерывных на* $\mathbb{R}$. *Сумма* $(f(x)+g(x))$ *функций* $f(x), g(x)$ *и произведение* $\alpha f(x)$ *функции* $f(x)$ *на действительное число* α *определяются равенствами:* $(f+g)(x)=f(x)+g(x), (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)$ *для всех* $x\in\mathbb{R}$

►Эти операции действительно определены на $\mathbb{C}$, так как сумма непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются непрерывными функциями, т.е. элементами $\mathbb{C}$.

Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Из коммутативности сложения действительных чисел следует справедливость равенства $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$. По этому $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, т.е. аксиома 1 выполняется.

Аксиома 2 следует аналогично из ассоциативности сложения. Нулевым вектором служит функция $O(x)$, тождественно равная нулю, которая, разумеется, является непрерывной.

Для любой функции f выполняется равенство $f(x)+0(x)=f(x)$, т.е. справедлива аксиома 3.

Противоположным вектором для вектора f будет функция $(-f)(x)=-f(x)$. Тогда $f(x)+(-f)(x)=0$ (аксиома 4 выполняется).

Пример 17.9. $\mathbb{C}$ — *множество действительных функций, определённых и непрерывных на* $\mathbb{R}$. *Сумма* $(f(x)+g(x))$ *функций* $f(x), g(x)$ *и произведение* $\alpha f(x)$ *функции* $f(x)$ *на действительное число* α *определяются равенствами:* $(f+g)(x) = f(x)+g(x), (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$

Аксиомы 5, 6 следуют из дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел, а аксиома 7 — из ассоциативности умножения чисел.

Последняя аксиома выполняется, так как умножение на единицу не изменяет функцию: $1 \cdot f(x) = f(x)$ для любого $x \in R$, т.е. $1 \cdot f = f$. Таким образом, рассматриваемое множество $\mathbb{C}$ с введёнными операциями является вещественным линейным пространством.

Аналогично доказывается, что $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \ldots, \mathbb{C}_m$ — множества функций, имеющих непрерывные производные первого, второго, $\ldots, m-$го порядков соответственно, также являются линейными пространствами. ◀

Простейшие следствия аксиом линейного пространства

Из аксиом линейного пространства $\mathbb{V}$ можно получить ряд простых свойств, которые легко доказываются.

1. Любое линейное пространство $\mathbb{V}$ имеет только один нулевой вектор $\overline{\mathbf{0}}$.

◀ Предположим, что существуют два нулевых элемента $\overline{\mathbf{0}}_1$ и $\overline{\mathbf{0}}_2$. Тогда, для любого $x \in \mathbb{V}$, верны равенства: $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}}_1 = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}}_2 = \overline{\mathbf{x}}$.

Если, в качестве $\overline{\mathbf{x}}$ взять последовательно вектора $\overline{\mathbf{0}}_1$ и $\overline{\mathbf{0}}_2$ и используя аксиомы 1, получим

$$\underline{\overline{\mathbf{0}}_1 + \overline{\mathbf{0}}_2 = \overline{\mathbf{0}}_1}, \quad \overline{\mathbf{0}}_2 + \overline{\mathbf{0}}_1 = \underline{\overline{\mathbf{0}}_1 + \overline{\mathbf{0}}_2 = \overline{\mathbf{0}}_2}.$$

Следовательно, $\overline{\mathbf{0}}_1 = \overline{\mathbf{0}}_2$ и единственность нулевого вектора установлена. ▶

Простейшие следствия аксиом линейного пространства

2. Каждый вектор линейного пространства $\mathbb{V}$ имеет только один противоположный вектор.

◀ Предположим, что для некоторого $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ существуют два противоположных элемента $(-\overline{\mathbf{x}}_1)$ и $(-\overline{\mathbf{x}}_2)$. Тогда

$$\underline{(-\overline{\mathbf{x}}_1)} = (-\overline{\mathbf{x}}_1) + \overline{\mathbf{0}} = (-\overline{\mathbf{x}}_1) + (\overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}_2)) = ((-\overline{\mathbf{x}}_1) + \overline{\mathbf{x}}) + (-\overline{\mathbf{x}}_2) = \overline{\mathbf{0}} + (-\overline{\mathbf{x}}_2) = \underline{(-\overline{\mathbf{x}}_2)}.$$

Следовательно, $(-\overline{\mathbf{x}}_1) = (-\overline{\mathbf{x}}_2)$ и единственность противоположного вектора установлена. ▶

Простейшие следствия аксиом линейного пространства

3. Нулевой элемент линейного пространства $\mathbb{V}$ равен произведению произвольного элемента $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ на вещественное число 0.

◀ Последовательно применяя аксиомы 3, 4, 2, 5, 1, 7, 5, 4, получаем

$$\underline{\overline{\mathbf{x}} \cdot 0} = \overline{\mathbf{x}} \cdot 0 + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot 0 + (\overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}})) = (\overline{\mathbf{x}} \cdot 0 + \overline{\mathbf{x}}) + (-\overline{\mathbf{x}}) =$$
$$(\overline{\mathbf{x}} \cdot 0 + 1 \cdot \overline{\mathbf{x}}) + (-\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} \cdot (0 + 1) + (-\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} \cdot 1 + (-\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} + (-\overline{\mathbf{x}}) = \underline{\overline{\mathbf{0}}}.$$

Следовательно, для любого вектора $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ верно равенство $\overline{\mathbf{x}} \cdot 0 = \overline{\mathbf{0}}$.
▶

Простейшие следствия аксиом линейного пространства

4. Для каждого элемента $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ противоположный элемент равен произведению этого элемента на вещественное число -1.

◀ Последовательно применяя аксиомы $5, 7, 1$ и свойство 3, получаем

$$\underline{\overline{\mathbf{x}} + (-1) \cdot \overline{\mathbf{x}}} = 1 \cdot \overline{\mathbf{x}} + (-1) \cdot \overline{\mathbf{x}} = \big(1 + (-1)\big) \cdot \overline{\mathbf{x}} = 0 \cdot \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} \cdot 0 = \underline{\overline{\mathbf{0}}}.$$

Следовательно, для любого вектора $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ верно равенство $\boxed{(-\overline{\mathbf{x}}) = (-1) \cdot \overline{\mathbf{x}}.}$ ▶

Пример 1.10. *Определить, является ли линейным вещественным пространством множество рациональных чисел* $\mathbb{Q}$ *относительно стандартных операций сложения и умножения чисел на множестве* .

►Множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно записать в виде

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Проверяем замкнутость множества.

Пусть $\overline{x} = \dfrac{m_x}{n_x}$ и $\overline{y} = \dfrac{m_y}{n_y}$, $m_x, m_y \in \mathbb{Z}$, $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\overline{x} + \overline{y} = \dfrac{m_x n_y + m_y n_x}{n_x n_y} = \dfrac{m}{n}$, где $m = m_x n_y + m_y n_x \in \mathbb{Z}$, $n = n_x n_y \in \mathbb{N}$.

2) Пусть $\alpha = \sqrt{2}$. Тогда $\alpha\overline{x} = \dfrac{\sqrt{2} m_x}{n_x} \in \mathbb{I}$, т.е. является иррациональным числом.

Следовательно, множество рациональных чисел не является замкнутым на множестве действительных чисел. ◄

Пример 1.11. *На множестве положительных действительных чисел* $\mathbb{R}_+$ *определены бинарные операции сложения* $\oplus$ *и умножения на число* $\odot$ *по следующим формулам:*

- *1)* $x \oplus y = xy$ *(т.е. по правилу умножения двух действительных чисел);*
- *2)* $x \odot \alpha = x^\alpha$ *(т.е. возведение в степень).*

Проверить, что данное множество является линейным пространством относительно введённых операций сложения элементов и умножения элемента на число.

►Пусть $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}_+$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Докажем, что множество замкнуто относительно введённых операций сложения векторов и умножение вектора на число.

$$1)\overline{x} \oplus \overline{y} = xy > 0 \Rightarrow \overline{x} \oplus \overline{y} \in \mathbb{R}_+.$$

$$2)\ \alpha \odot \overline{x} = x^\alpha > 0 \Rightarrow \alpha \odot \overline{x} \in \mathbb{R}_+.$$

Тем самым мы доказали, что множество положительных действительных чисел замкнуто относительно заданных операций.

2. Проверяем выполнимость всех восьми аксиом.

1) $\overline{x} \oplus \overline{y} = xy = yx = \overline{y} \oplus \overline{x}$.

2) $(\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z} = \overline{xy} \oplus \overline{z} = xyz$.

$\overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}) = \overline{x} \oplus \overline{yz} = xyz$.

3) Найдём нулевой элемент.

$\overline{x} \oplus \overline{1} = x \cdot 1 = 1 \cdot x = \overline{1} \oplus \overline{x} = x$.

4) Проверим существования обратного элемента.

$\mathbf{\overline{x}} \oplus \overline{1/x} = 1$. Следовательно, для каждого вектора $\mathbf{\overline{x}}$ найдётся противоположный вектор $\overline{-x} = \overline{1/x}$.

5) $1 \odot \overline{x} = x^1 = \overline{x}$.

6) $\lambda \odot (\mu \odot \overline{x}) = \lambda \odot \overline{x^\mu} = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot \overline{x}$.

7) $\lambda \odot (\mathbf{\overline{x}} \oplus \mathbf{\overline{y}}) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda$.

$\lambda \odot \mathbf{\overline{x}} \oplus \lambda \odot \mathbf{\overline{y}} = \overline{x^\lambda} \oplus \overline{y^\lambda} = x^\lambda y^\lambda = (xy)^\lambda$.

8) $(\lambda + \mu) \odot \mathbf{\overline{x}} = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu = \overline{x^\lambda} \oplus \overline{x^\mu} = \lambda \odot \mathbf{\overline{x}} \oplus \mu \odot \mathbf{\overline{x}}$.

Тем самым доказано, что множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}_+$ на котором определены бинарные операции сложения $\oplus$ и умножения на число $\odot$ является вещественным линейным пространством. ◀

Пример 17.12. *Является ли множество векторов* $\mathbb{V} = \{(a, a+b, b-2c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$, *линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число?*

►Пусть $\overline{x} = (a_x, a_x + b_x, b_x - 2c_x), a_x, b_x, c_x \in \mathbb{R}$, $\overline{y} = (a_y, a_y + b_y, b_y - 2c_y), a_y, b_y, c_y \in \mathbb{R}$, $\overline{z} = (a_z, a_z + b_z, b_z - 2c_z)$, $a_z, b_z, c_z \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{V}$.

Докажем, что множество замкнуто относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число.

1) $\overline{x} + \overline{y} = (a_x, a_x + b_x, b_x - 2c_x) + (a_y, a_y + b_y, b_y - 2c_y) =$
$= ((a_x + a_y), (a_x + a_y) + (b_x + b_y), (b_x + b_y) - 2(c_x + c_y)) =$
$= (a, a + b, b - 2c)$, где $a = a_x + a_y$, $b = b_x + b_y$, $c = c_x + c_y$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $\overline{x} + \overline{y} \in \mathbb{V}$.

2) $\alpha\overline{x} = \alpha(a_x, a_x + b_x, b_x - 2c_x) = (a_1, a_1 + b_1, b_1 - 2c_1)$, где $a_1 = \alpha a_x$, $b_1 = \alpha b_x$, $c_1 = \alpha c_x$, $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $\alpha\overline{x} \in \mathbb{V}$.

Тем самым мы доказали, что множество неотрицательных действительных чисел замкнуто относительно заданных операций.

$$\mathbb{V} = \{(a, a+b, b-2c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

2. Проверяем выполнимость всех восьми аксиом.

1) $\overline{x} + \overline{y} = ((a_x + a_y), (a_x + a_y) + (b_x + b_y), (b_x + b_y) - 2(c_x + c_y)) =$
$= \overline{y} + \overline{x}$.

2) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \big((a_x + a_y + a_z),$
$(a_x + a_y + a_z) + (b_x + b_y + b_z), (b_x + b_y + b_z) - 2(c_x + c_y + c_z)\big) = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$

3) Нулевой элемент $\overline{0} = (0, 0, 0)$, получается при из решений системы $a = 0, a + b = 0, b - 2c = 0$. Т.е. $a = b = c = 0$.

4) Обратным элементом к произвольному элементу $\overline{x} \in \mathbb{V}$ является элемент $\overline{(-x)} = (-a_x, -a_x - b_x, -b_x + 2c_x)$. $\overline{x} + \overline{(-x)} = \overline{0}$.

5) $1 \cdot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} = \overline{x}$.

6) $\lambda\,(\mu \cdot \overline{x}) = (\lambda\mu)\overline{x}$.

7) $\lambda\,(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda\overline{x} + \lambda\overline{y}$.

8) $(\lambda + \mu)\overline{x} = \lambda\overline{x} + \mu\overline{x}$.

Тем самым доказано, что множество $\mathbb{V}$ на котором заданы стандартные операции сложения векторов и умножение вектора на число, является вещественным линейным пространством. ◀

Пример 17.13. *Является ли множество векторов* $\mathbb{V} = \{(0, b, b-2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$, *линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число?*

▶Пусть $\mathbf{\overline{x}} = (0, b_x, b_x - 2c_x), b_x, c_x \in \mathbb{R}$,
$\mathbf{\overline{y}} = (0, b_y, b_y - 2c_y), b_y, c_y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\overline{z}} = (0, b_z, b_z - 2c_z)$,
$b_z, c_z \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. $\mathbf{\overline{x}}, \mathbf{\overline{y}}, \mathbf{\overline{z}} \in \mathbb{V}$.

Докажем, что множество замкнуто относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число.

1) $\overline{x} + \overline{y} = (0, b_x, b_x - 2c_x) + (0, b_y, b_y - 2c_y) =$
$= (0, (b_x + b_y), (b_x + b_y) - 2(c_x + c_y)) =$
$= (0, b, b - 2c)$, где $b = b_x + b_y$, $c = c_x + c_y$, $b, c \in \mathbb{R}$.
Следовательно, $\overline{x} + \overline{y} \in \mathbb{V}$.

2) $\alpha\overline{x} = \alpha(0, b_x, b_x - 2c_x) = (0, b_1, b_1 - 2c_1)$, где $b_1 = \alpha b_x$, $c_1 = \alpha c_x$, $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $\alpha\overline{x} \in \mathbb{V}$.

Тем самым мы доказали, что множество $\mathbb{V}$ замкнуто относительно заданных операций.

$$\mathbb{V} = \{(0, b, b - 2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$$

2. По аналогии с примером 17.12 проверяется выполнимость всех восьми аксиом.

При $b = c = 0$ получаем нулевой вектор $\overline{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{V}$.

Обратным для произвольного вектора $\overline{x} = (0, b_x, b_x - 2c_x), a_x, b_x, c_x \in \mathbb{R}$, является вектор $\overline{-x} = (0, -b_x, -b_x + 2c_x)$.

Ответ: множество векторов $\mathbb{V} = \{(0, b, b - 2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$ является линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число. ◄

Пример 17.14. *Является ли множество векторов* $\mathbb{V} = \{(b+1, b, b-2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$, *линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число?*

►Данное множество векторов $\mathbb{V}$ является подмножеством векторного пространства $\mathbb{V}_3$ в которых первая координата на 1 больше второй.

Пусть $\overline{x} = (b_x + 1, b_x, b_x - 2c_x), a_x, b_x, c_x \in \mathbb{R}$,
$\overline{y} = (b_y + 1, b_y, b_y - 2c_y), b_y, c_y \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{V}$.

Проверим замкнутость множества относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число.

1) $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = (b_x + \underline{1}, b_x, b_x - 2c_x) + (b_y + \underline{1}, b_y, b_y - 2c_y) =$
$= ((b_x + b_y + 2), (b_x + b_y), (b_x + b_y) - 2(c_x + c_y)) =$
$= (b + \underline{2}, b, b - 2c)$, где $b = b_x + b_y$, $c = c_x + c_y$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Следовательно, $\overline{x} + \overline{y} \notin \mathbb{V}$.

2) $\alpha\overline{x} = \alpha(b_x + 1, b_x, b_x - 2c_x) = (\alpha(b_x + 1), \alpha b_x, \alpha(b_x - 2c_x +) =$
$= (b_1 + \alpha, b_1, b_1 - 2c_1)$, где $b_1 = \alpha b_x \in \mathbb{R}$, $c_1 = \alpha c_x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ $\alpha\overline{x} \notin \mathbb{V}$.

$$\mathbb{V} = \{(b+1, b, b-2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$$

2. Проверим выполнимость аксиом (1-8).

Нулевого вектора $\overline{0} = (0, 0, 0)$ на данном множестве не существует, т.к. система уравнений $\begin{cases} b+1=0, \\ b=0 \end{cases}$ не имеет решения.

Поэтому и противоположного элемента к любому элементу $\overline{x} = (b+1, b, b-2c_x)$ не существует.

Ответ: множество векторов $\mathbb{V} = \{(b+1, b, b-2c) |\ b, c \in \mathbb{R}\}$ не является линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число. ◄

1.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим произвольное вещественное линейное пространство V с элементами $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \ldots$.

Определение 1.2. ***Линейной комбинацией*** *элементов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *пространства* $\mathbb{V}$ *называется вектор равный сумме произведений этих элементов на произвольные действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *называемые коэффициентами линейной комбинации.*

$$\alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{x}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{x}}_n. \tag{1.1}$$

Определение 1.3. *Система векторов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***линейно зависимой****, если существует числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *неравные нулю одновременно, такие, что*

$$\alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{x}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{x}}_n = \overline{\mathbf{0}}. \tag{1.2}$$

Определение 1.4. *Система векторов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***линейно независимой****, если из равенства (1.2), следует, что* $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Определение 1.5. *Система векторов* $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***полной****, если любой вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ *можно представить в виде линейной комбинации векторов системы:* $\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_n$.

Теорема 17.1. *Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих элементов являлся линейной комбинацией других.*

Теорема 17.2. *Если некоторое подмножество элементов линейного пространства* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ *линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$.

Очень важное определение! Запомнить!

Определение 17.5. *Базисом в линейном пространства* V *называется любой упорядоченный набор его* n *элементов* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, *если выполняются два условия:*

1) *эти элементы независимые;*
2) *любое подмножество в* V, *состоящее из* $n+1$*-го элемента и включающее все* n *элементов* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, *линейно зависимо.*

Определение 17.6. *Линейное пространство V называется n-мерным и обозначается V_n, если в нём существует базис, состоящий из n элементов.*

При этом число n принято называть размерностью пространства V и обозначать $dim(V)$.

Определение 17.7. *Линейное пространство V называется бесконечномерным, если в нём существует любое число линейно независимых элементов.*

Теорема 17.3. *Для каждого элемента $\overline{x} \in V_n$ существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$.*

►Если $\overline{x}$ произвольный вектор пространства V_n, то, по определению базиса, система векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n, \overline{x}$ линейна зависима. Следовательно, элемент $\overline{x}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{e}_1 + \alpha_2\overline{e}_2, \ldots, \alpha_n\overline{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{e}_i. \qquad (17.3)$$

Для доказательства единственности, предположим, что существует другая линейная комбинация $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \overline{e}_i$.

Тогда получаем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i)\overline{e}_i = \overline{0}$.

Так как система базисных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ независима, следовательно $\alpha_i = \beta_i, 1, 2, \ldots, n$.

Таким образом, единственность представления произвольного вектора $\overline{x} \in V$ в виде (17.3) доказана.◄

Определение 17.8. *Если* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ *— базис векторного пространства, то равенство*

$$\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + \ldots + x_n\overline{e}_n \qquad (17.4)$$

называется разложением вектора $\overline{x}$ *по базису* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, *а числа* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *называются координатами вектора* $\overline{x}$ *в базисе* $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$.

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич