РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 2

Лекция 10

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Берков Николай Андреевич

15 апреля 2023г

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Канонический вид квадратичной формы. Теорема Лагранжа. Теорема Якоби. Нормальный вид квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду. Закон инерции квадратичных форм, положительный и отрицательный индекс, ранг. Три инварианта квадратичной формы.

Определение 9.1. *Числовая функция* $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$, *аргументами которой являются произвольные векторы* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$, *называется* **билинейной формой (билинейным функционалом)**, *если для любых векторов* $\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{V}$ *и любого действительного числа* α *выполняется следующие соотношения, называемые* **аксиомами билинейной формы:**

(1) $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}}) = \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}}) + \mathbf{B}(\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})$; (2) $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}}) = \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) + \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}})$ (3) $\mathbf{B}(\alpha\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) = \alpha\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$; (4) $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\alpha\overline{\mathbf{y}}) = \alpha\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = \mathbf{X}^T \mathbf{A}_E \mathbf{Y}.$$

Определение 9.6. *Пусть* $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})$ — *симметричная билинейная форма в* n*-мерном линейном пространстве* $\mathbb{V}$. ***Квадратичной формой*** *называется функционал* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{x}})$.

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}^T A\,\mathbf{X},$$

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

При переходе к новому базису координаты вектора $\overline{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ заданного в базисе $\mathfrak{B}_E$ в новом базисе $\mathfrak{B}_E$ вычисляются по формуле

$$Y = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F}\mathbf{X}, \quad \text{или} \quad \mathbf{X} = \mathbf{P}_{E\to F}\mathbf{Y},$$

где $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ — матрицы-столбцы вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в старом и новом базисах, соответственно.

В предыдущей лекции мы вывели формулу (9.7) преобразования матрицы квадратичной формы при переходе от базиса $\mathfrak{B}_E$ к новому базису $\mathfrak{B}_F$

$$A_F = \mathbf{P}^{T}_{E\to F}\mathbf{A}_E\mathbf{P}_{E\to F}.$$

Определение 10.1. *Квадратичную форму* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_i x_i^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$, *содержащая только квадраты переменных, называют* ***квадратичной формой канонического вида.***

Теорема 10.1. ***(Теорема Лагранжа).*** *Любая квадратичная форма* $\varphi(\overline{\mathbf{x}})$ *в* n*-мерном линейном пространстве* $\mathbb{V}$ *с помощью невырожденного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду.*

Замечание 10.1. *Если коэффициенты квадратичной формы являются рациональными числами, то при помощи невырожденных преобразования её можно привести к каноническому виду в котором коэффициенты также рациональные числа.*

Метод Лагранжа

Алгоритм метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

1. Выбрать такую переменную, назовём её ведущей, которая входит во второй и первой степени одновременно и **перейти к пункту 2**. Например, $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \ldots + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \ldots$, выбираем ведущую переменную x_2.

Если в квадратичной форме нет переменных со второй степенью, то необходимо выбрать пару переменных произведение которых входит в квадратичную форму и **перейти к пункту 3**. Например, $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \ldots + a_{13}x_1x_3 + \ldots$.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то **задача решена**, квадратичная форма приведена к каноническому виду. **Перейти к пункту 4**.

2. Собрав все переменные содержащие ведущую переменную, дополнить сумму этих переменных до полного квадрата. Получим сумму полного квадрата некоторой линейной функции и квадратичную форму, в которую ведущая переменная уже не входит.

Сделать замену переменных, приняв за новую переменную полученное выражение линейной формы, а остальные старые переменные принять за новые переменные. **Перейти на пункт 1**.

3. Выбранную пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму заменить на разность и сумму новых переменных, а остальные старые переменные принять за новые переменные. **Перейти на пункт 1**.

4. Переписать полученную квадратичную форму.

Кратко суть метода Лагранжа сводится к выделению полных квадратов при условии, что в квадратичной форме присутствуют квадраты переменных. Если квадратов переменных нет, то произведения $x_i x_j$ при помощи введения новых переменных y_i, y_j по правилу: $\begin{cases} x_i = y_i - y_j, \\ x_j = y_i + y_j. \end{cases}$

После такой замены переменных в квадратичной форме появляются квадраты переменных, т.к. $x_i x_j = y_i^2 - y_j^2$.

На простых примерах рассмотрим суть данного метода.

Пример 10.1. *Привести к каноническому виду квадратичную форму* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 4x_1x_2$ *заданную в некотором базисе* $\mathfrak{B}_E = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2\}$ *и найти канонический базис* $\mathfrak{B}_F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2\}$.

◀Матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}_I$ $\quad A_E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 4x_1x_2 = x_1^2 - 2x_1(2x_2) + (2x_2)^2 - (2x_2)^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Введём новые переменные $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2, \\ y_2 = x_2. \end{cases}$

В новых переменных форма имеет канонический вид $\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = y_1^2 - 4y_2^2$.

Найдём матрицу перехода от старых координат $x_1,\ x_2$ к новым — $y_1,\ y_2$.
Используем формулу преобразования координат

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E\to F}\mathbf{Y}.$$

Выразим значения старых переменных через новые $\begin{cases} x_2 = y_2, \\ x_1 = y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_E$ в базис $\mathfrak{B}_F$ $\quad \mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса по формулам

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1, \\ \overline{\mathbf{f}}_2 = 2\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2. \end{cases}$$

Матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}_F$ является диагональной $\quad A_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$ ▶

Пример 10.2. *Привести к каноническому виду квадратичную форму* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 2x_1x_2$ *заданную в некотором базисе* $\mathfrak{B}_E = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2\}$ *и найти канонический базис* $\mathfrak{B}_F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2\}$.

◀Матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}_I$

$$A_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как нет слагаемых содержащих квадраты переменных x_1^2 или x_2^2, перейдём к новым переменным y_1, y_2: $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2. \end{cases}$

Получаем,
$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 2x_1x_2 = 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2y_1^2 - 2y_2^2 = \varphi(\overline{\mathbf{y}})$.

В новых координатах y_1, y_2 квадратичная форма $\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = 2y_1^2 - 2y_2^2$ имеет канонический вид. Найдём матрицу перехода от старых координат x_1, x_2 к новым — y_1, y_2.

Используем формулу преобразования координат

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2. \end{cases}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E\to F}\mathbf{Y}.$$

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = y_1^2 - 4y_2^2.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_E$ в базис $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса по формулам

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2, \\ \overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{e}}_1 - \overline{\mathbf{e}}_2. \end{cases}$$

Матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}_F$ является диагональной

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Рассмотрим пример такого же вида, но в четырёхмерном линейном пространстве.

Пример 10.3. *Квадратичная форма* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4$ *задана в некотором базисе* $\mathfrak{B}_E = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3, \overline{\mathbf{e}}_4\}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$. *Привести её к каноническому виду и найти канонический базис* $\mathfrak{B}_F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2, \overline{\mathbf{f}}_3, \overline{\mathbf{f}}_4\}$.

►Перейдём к новым переменным y_1, y_2, y_3, y_4. Для этого сделаем замену переменных $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$.

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 + 2(y_1 + y_2)y_4 - 2(y_1 - y_2)y_4 = y_1^2 - y_2^2 + \underline{y_1y_3} + \underline{y_2y_3} + \underline{y_1y_3} - \underline{y_2y_3} + \underline{2y_1y_4} + \underline{2y_2y_4} - \underline{2y_1y_4} + \underline{2y_2y_4} = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 4y_2y_4.$$

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = \underline{y_1^2} - \underline{y_2^2} + \underline{2y_1y_3} + \underline{4y_2y_4} = \underline{(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2)} - y_3^2 - (\underline{y_2^2 - 4y_2y_4 + 4y_4^2}) + 4y_4^2 = (\underline{y_1 + y_3})^2 - (\underline{y_2 - 2y_4})^2 - y_3^2 + 4y_4^2.$$

Ещё раз делаем замену $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2 - 2y_4$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_4$, получаем канонический вид квадратичной формы

$$\varphi(\overline{\mathbf{z}}) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 4z_4^2.$$

Таким образом, при помощи двух линейных преобразований мы привели квадратичную форму $\varphi(\overline{\mathbf{x}})$ к новым переменным $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$, в которых она имеет канонический вид.

Найдём матрицу перехода от старых координат $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ к новым — $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$.

Сначала выразим y_i через z_i.

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - 2y_4, \\ z_3 = y_3, \\ z_4 = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 + 2z_4, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = z_4 \end{cases}$$

Затем полученные y_i подставим в первую замену.

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4.$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 - 2z_4, \\ x_3 = z_3, \\ x_4 = z_4 \end{cases}$$

Затем полученные y_i подставим в первую замену.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \\ x_4 = y_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4, \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 - 2z_4, \\ x_3 = z_3, \\ x_4 = z_4 \end{cases}$$

Используем формулу преобразования координат

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E\to F}\mathbf{Z}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_E$ в базис $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса по формулам

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{f}}_3 = -\bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3, \\ \bar{\mathbf{f}}_4 = 2\bar{\mathbf{e}}_1 - 2\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_4. \end{cases}$$

Пример 10.4. *Задана квадратичная форма* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$. *Привести* $\varphi(\overline{\mathbf{x}})$ *к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат. Найти канонический базис.*

►Так как коэффициент при x_1^2 не равен нулю, группируем подчёркнутые которые содержат x_1 и приводим к полному квадрату добавляя и вычитывая выражения дополняющее подчёркнутые слагаемые до полного квадрата.

$$\varphi(\overline{x}) = \underline{2x_1^2} - x_2^2 - \underline{4x_1x_2} + \underline{5x_1x_3} - 6x_2x_3 + x_3^2 =$$
$$= 2\left(x_1^2 - 2x_1(x_2 - \tfrac{5}{4}x_3) + \left(x_2 - \tfrac{5}{4}x_3\right)^2\right) - 2\left(x_2 - \tfrac{5}{4}x_3\right)^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 +$$
$$+ x_3^2 = 2\left(x_1 - x_2 + \tfrac{5}{4}x_3\right)^2 - 2x_2^2 + 5x_2x_3 - \tfrac{25}{8}x_3^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2.$$

Обозначим полученное линейное выражение в скобках $y_1 = x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3$. Теперь переменной x_1 в полученном квадратичном выражении нет. Аналогичные преобразования выполняем с оставшейся частью квадратичной формы содержащие переменные x_2 и x_3.

$$2y_1^2-\underline{3x_2^2}-\underline{x_2x_3}-\tfrac{17}{8}x_3^2=2y_1-3\left(x_2^2+2x_2\tfrac{1}{6}x_3+\left(\tfrac{1}{6}x_3\right)^2\right)+3\left(\tfrac{1}{6}x_3\right)^2-$$
$$-\tfrac{17}{8}x_3^2=2y_1^2-3\left(x_2^2+\tfrac{1}{6}x_3\right)^2-\tfrac{49}{24}x_3^2.$$

Обозначим полученное линейное выражение в скобках $y_2=x_2+\frac{1}{6}x_3$ и ещё $y_3=x_3$.

В результате получаем канонический вид квадратичной формы $\varphi(\overline{y})=2y_1^2-3y_2^2-49/24y_3^2$.

Выпишем преобразования приведшие заданную квадратичную форму к каноническому виду.

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+\frac{5}{4}x_3, \\ y_2=x_2+\frac{1}{6}x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$$

Обратим преобразование, методом Гаусса. Полученная система является треугольной, следовательно прямой ход метода Гаусса уже выполнен, выполняем обратный ход:

$$\left\{\ x_3=y_3,\ \ x_2=y_2-\tfrac{1}{6}y_3,\ \ x_1=y_1+y_2-\tfrac{3}{2}y_3.\right.$$

$$\left\{ x_3 = y_3,\ x_2 = y_2 - \tfrac{1}{6}y_3,\ x_1 = y_1 + y_2 - \tfrac{3}{2}y_3. \right.$$

Используем формулу преобразования координат

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E\to F}\mathbf{Y}.$$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса $\mathfrak{B}_E$ по формулам

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1, \\ \overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2, \\ \overline{\mathbf{f}}_3 = -1{,}5\overline{\mathbf{e}}_1 - \dfrac{1}{6}\overline{\mathbf{e}}_2 + \overline{\mathbf{e}}_3. \end{cases}$$

При приведении квадратичной формы к каноническому виду с каждым шагом уменьшается число старых переменных поэтому вид преобразования к новым переменным имеет треугольную матрицу с единицей на главной диагонали. Такие преобразования называются единично треугольными.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ y_2 = x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = x_n. \end{cases} \qquad (11.1)$$

Теорема 10.2. *Единично треугольное преобразование не меняют значения угловых миноров матрицы квадратичной формы.*

Определение 10.3. ***Угловым минором*** Δ_k *k-го порядка квадратной матрицы* $\mathbf{A}$ *n-го порядка называется определитель матрицы* $\mathbf{A}_k$, *полученный вычеркиванием в матрице* $\mathbf{A}$ *последних* $n-k$ *строк и столбцов,* $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = det\mathbf{A}.$$

Теорема 10.3. ***Теорема Якоби.***
Пусть ранг квадратичной формы $\varphi(\overline{\mathbf{x}})$ равен r. Тогда квадратичную форму единично треугольным преобразованием $\mathbf{Y} = \mathbf{CX}$ можно привести к каноническому виду

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2$$

тогда и только тогда, когда угловые миноры

$$\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \ldots,\ \Delta_r \neq 0,$$

причём $\lambda_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$, $\Delta_0 = 1, k = 1, 2, \ldots, r$.

Пример 10.5. *Методом Якоби найти канонический вид квадратичной формы* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$.

◀Выпишем матрицу квадратичной формы и все её угловые миноры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\lambda_2 = \Delta_2/\Delta_1 = 1; \quad \lambda_1 = \Delta_1 = 1.$$

Согласно теореме Якоби квадратичная форма единично треугольным преобразованием приводится к каноническому виду

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = y_1^2 + y_2^2.$$

Решим эту задачу методом Лагранжа.

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Замена $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2, \end{cases}$

приводит квадратичную форму к тому же виду, что и для методом Якоби.

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = y_1^2 + y_2^2.$$

Заметим, что в процессе решения методом Лагранжа легко получить матрицу перехода к новому базису и координаты нового базиса.

Обращаем систему $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2, \\ y_2 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_2. \end{cases}$

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \to F}\mathbf{Y}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_E$ в базис $\mathfrak{B}_F$ $\quad \mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса $\mathfrak{B}_E$ по формулам

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{f}}_1 = \overline{\mathbf{e}}_1, \\ \overline{\mathbf{f}}_2 = \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2. \end{cases}$$

Пример 10.6. *Методом Якоби найти канонический вид квадратичной формы*

$$1)\,\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

$$2)\,\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 4x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 10x_1x_3 - 12x_2x_3.$$

►Выпишем матрицу квадратичной формы и все её угловые миноры

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, для данного примера метод Якоби не применим.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -4 & -2 & -6 \\ 5 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -24, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -4 & -2 & -6 \\ 5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 98.$$

$$\lambda_3 = \Delta_3/\Delta_2 = -\frac{49}{12}; \qquad \lambda_2 = \Delta_2/\Delta_1 = -6; \qquad \lambda_1 = \Delta_1 = 4.$$

$$\varphi(\overline{\mathbf{y}}) = 4y_1^2 - 6y_2^2 - \frac{49}{12}y_3^2.$$ ►

РТУ МИРЭА

Кафедра ВМиП

Лекция 10

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

17 апреля 2022г