

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 11

Знакоопределенные квадратичные формы

Берков Николай Андреевич

22 апреля 2023г

Знакоопределенные квадратичные формы

Координатная форма представления квадратичной формы

$$\varphi(\bar{\mathbf{X}}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2.$$

Сокращенная запись координатного представления квадратичной формы

$$\varphi(\bar{\mathbf{X}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j.$$

Матричное произведение

$$\varphi(\bar{\mathbf{X}}) = (x_1 \dots x_n) \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}.$$



Определение 11.1. Квадратичная форма

$$\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

содержащая только квадратичные слагаемые называется квадратичной формой канонического вида.

Определение 11.2. Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют каноническим базисом.

В каноническом базисе матрица квадратичной формы является диагональной.

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (11.1)$$

Определение 11.3. Ранг квадратичной формы (индекс инерции) — это ранг матрицы в каком-либо базисе:

$$\text{rang } \varphi(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{r}.$$



$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2,$$

Очевидно, что квадратичная форма имеет канонический вид тогда и только тогда, когда её матрица диагональная.

Ранг квадратичной формы в каноническом виде равен числу её ненулевых коэффициентов.

Если после замены переменных $\mathbf{X} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Y}$ квадратичная форма $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ превращается в форму $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$ канонического вида, то говорят, что замена $\mathbf{X} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Y}$ приводит квадратичную форму $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ к каноническому виду.



Теорема 11.1. Ранг квадратичной формы не меняется при замене базиса и равен количеству ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

Определение 11.4. Положительным индексом инерции квадратичной формы i_+ называется количество положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

Определение 11.5. Отрицательным индексом инерции квадратичной формы i_- называется количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

Определение 11.6. Сигнатурой квадратичной формы σ называется разность между числом положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

$$i_+ + i_- = r, \quad \sigma = i_+ - i_-.$$



Определение 11.7. Квадратичная форма имеет нормальный вид, если она имеет канонический вид и ненулевые коэффициенты при квадратах по модулю равны 1.

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{(i_+)}^2 - x_{(i_+)+1}^2 - \dots - x_r^2. \quad (11.2)$$

Определение 11.8. Базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид, называется нормальным.

Определение 11.9. Две квадратичные формы называются **эквивалентными**, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования переменных с вещественными коэффициентами.

Теорема 11.2. (закон инерции квадратичных форм).

Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

СЛЕДСТВИЕ: 11.1. Пусть $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$ — квадратичные формы. Для того, чтобы эти формы были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые положительные $\mathbf{i}_+$ и одинаковые отрицательные $\mathbf{i}_-$ индексы инерции.



Пример 11.1. Выяснить, эквивалентны ли квадратичные формы $\varphi(\bar{x}) = \underline{2x_1^2} + \underline{9x_2^2} + \underline{3x_3^2} + \underline{8x_1x_2} - \underline{4x_1x_3} - \underline{10x_2x_3}$ и $g(\bar{y}) = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

Выпишем матрицы квадратичных форм.

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Сначала приведем эти формы к каноническому виду. Возьмём три слагаемые содержащие переменную x_1 и выделим полный квадрат.

$$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 = 2(x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_3) + (2x_2 - x_3)^2 - (2x_2 - x_3)^2) = 2z_1^2 - 8x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2, \text{ где } z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3.$$

Тогда $\varphi(\bar{x}) = 2z_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = 2z_1^2 + (x_2 - x_3)^2 = 2z_1^2 + z_2^2$, где $z_2 = x_2 - x_3$.

Таким образом, замена $z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, z_2 = x_2 - x_3, z_3 = x_3$ приводит форму $\varphi(\bar{x})$ к каноническому виду $\varphi(\bar{z}) = 2z_1^2 + z_2^2$.



$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}) = \underline{2y_1^2} + \underline{3y_2^2} + \underline{6y_3^2} - \underline{4y_1y_2} - \underline{4y_1y_3} + \underline{8y_2y_3}.$$

Аналогично для формы $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$.

$$\begin{aligned} 2y_1^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 &= 2(y_1^2 - 2y_1(y_2 + y_3) + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2) = \\ &= 2u_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 - 4y_2y_3, \end{aligned}$$

где $u_1 = y_1 - y_2 - y_3$, откуда

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}) = 2u_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 4y_2y_3 = 2u_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 = 2u_1^2 + u_2^2,$$

где $u_2 = y_2 + 2y_3$.

Таким образом, замена

$$\begin{cases} u_1 = y_1 - y_2 - y_3, \\ u_2 = y_2 + 2y_3, \\ u_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{приводит форму } \mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}) \text{ к каноническому виду}$$

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{u}}) = 2u_1^2 + u_2^2.$$

$$\varphi(\bar{\mathbf{z}}) = 2z_1^2 + z_2^2.$$

Мы видим, что формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$ эквивалентны.



Получаем систему равенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 - y_2 - y_3, \\ x_2 - x_3 = y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3, \\ x_2 = y_2 + 3y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Получили замена переменных, которая переводит форму $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ в форму $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$.

Можно проверить полученный результат при помощи перехода к новому базису. Матрица перехода от базиса формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ к базису формы $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$ равна

$$\mathbf{P}_{\varphi \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{X} = \mathbf{P}_{\varphi \rightarrow g} \mathbf{Y}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g &= \mathbf{P}_{\varphi \rightarrow g}^T \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{P}_{\varphi \rightarrow g} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получили матрицу $\mathbf{A}_g$ квадратичной формы $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}})$ в первоначальном базисе.



Исследование квадратичной формы на знакоопределенность

Определение 11.10. Квадратичная форма называется положительно определённой, если $\varphi(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$.

Определение 11.11. Квадратичная форма называется отрицательно определённой, если $\varphi(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$.

Определение 11.12. Если существуют такие $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что $\varphi(\bar{x}) > 0$, а $\varphi(\bar{y}) < 0$, то такая квадратичная форма называется знакопеременной, или квадратичной формой общего вида.



Простейшие примеры квадратичных форм в трёхмерном пространстве

- $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ — положительно определённая.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_+ = 3, \mathbf{i}_- = 0, \mathbf{r} = 3, \sigma = 3.$$

- $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_3^2$ — неотрицательно определённая, вырожденная.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_+ = 2, \mathbf{i}_- = 0, \mathbf{r} = 2, \sigma = 2.$$

где $\mathbf{i}_+$, $\mathbf{i}_-$, $\mathbf{r}$, σ — положительный индекс инерции, отрицательный индекс инерции, ранг квадратичной формы и сигнатура квадратичной формы, соответственно.

$$\sigma = \mathbf{i}_+ - \mathbf{i}_-.$$



Простейшие примеры квадратичных форм в трёхмерном пространстве

- $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = 2x_1x_3$ — знакопеременная, вырожденная.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_+ = 1, \mathbf{i}_- = 1, \mathbf{r} = 2, \sigma = 0.$$

Эта квадратичная форма приводится к каноническому виду $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{y}}) = 2y_1^2 - 2y_2^2$ при помощи преобразования $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_3, \\ y_2 = x_1 - x_3. \end{cases}$

- $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ — знакопеременная.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i}_+ = 2, \mathbf{i}_- = 1, \mathbf{r} = 3, \sigma = 1.$$



Исследование квадратичной формы на знакоопределённость

1 способ — по каноническому виду.

Теорема 11.3. (1) Квадратичная форма **положительно определена** тогда и только тогда, когда она невырожденная и все коэффициенты в её каноническом виде положительные:

$$r = i_+ = \dim L.$$

(2) Квадратичная форма **отрицательно определена** тогда и только тогда, когда она невырожденная и все коэффициенты в её каноническом виде отрицательные:

$$r = i_- = \dim L.$$

(3) во всех остальных случаях квадратичная форма общего вида.

2 способ — по критерию Сильвестра.

(1) Квадратичная форма **положительно определена** тогда и только тогда, когда все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.

(2) Квадратичная форма **отрицательно определена** тогда и только тогда, когда знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса.

(3) во всех остальных случаях квадратичная форма общего вида.



Критерий Сильвестра для трёхмерного пространства:

$$(1) \begin{cases} \Delta_1 > 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \Delta_3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма положительно определена.}$$

$$(2) \begin{cases} \Delta_1 < 0, \\ \Delta_2 > 0, \\ \Delta_3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма отрицательно определена.}$$

(3) во всех остальных случаях квадратичная форма общего вида.

Критерий Сильвестра для n-мерного пространства:

(1) Если все угловые миноры положительны, т.е. $\Delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n. \Leftrightarrow$ квадратичная форма положительно определена.

(2) Если $(-1)^k \Delta_k > 0, k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow$ квадратичная форма отрицательно определена.

(3) во всех остальных случаях квадратичная форма общего вида.



Способы приведения квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду:

- (1) метод Лагранжа выделения полных квадратов;
- (2) с помощью ортогонального преобразования;
- (3) методом Якоби.



Пример 11.2. Вычислить, является ли квадратичная форма положительно (отрицательно) определённой или неопределённой.

$$\varphi(\bar{x}) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 15x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

◀ Матрица квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Вычислим угловые миноры матрицы $\mathbf{A}$:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 83 > 0.$$

Все угловые миноры положительны, следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена. ►



Пример 11.3. Вычислить, является ли квадратичная форма положительно (отрицательно) определённой или неопределённой.

$$\varphi(\bar{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

◀ Матрица квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta_1 = 3 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 15 \end{vmatrix} = -11 < 0.$$

Угловые миноры разного знака, следовательно, по критерию Сильвестра квадратичная форма является неопределённой. ►



Пример 11.4. В некотором базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ задана квадратичная форма $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 18x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

а) Привести $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат и канонический базис $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3\}$.

б) Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$.

в) Исследовать $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ на знакоопределённость двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

◀а) Применяем метод Лагранжа.

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{\mathbf{x}}) &= \underline{x_1^2} + 3x_2^2 + 18x_3^2 + \underline{2x_1x_2} + \underline{2x_1x_3} - 6x_2x_3 = \\ &= (x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2) - (x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 18x_3^2 - 6x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 + 3x_2^2 + 18x_3^2 - 6x_2x_3 = \\ &= y_1^2 + 2x_2^2 - 8x_2x_3 + 17x_3^2 = y_1^2 + 2(x_2^2 - 2x_2(2x_3) + (2x_3)^2) - 2(2x_3)^2 + 17x_3^2 = \\ &= y_1^2 + 2(x_2 - 2x_3)^2 + 9x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 + 9y_3^2 = \varphi(\bar{\mathbf{y}}).\end{aligned}$$

Привели квадратичную форму $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ к каноническому виду

$$\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = y_1^2 + 2y_2^2 + 9y_3^2.$$

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = x_2 - 2x_3, \quad y_3 = x_3.$$



Выпишем полученные преобразование координат

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 - 2x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход метода Гаусса, выразим переменные x_1, x_2, x_3 .

$$\begin{cases} x_3 = y_3, \\ x_2 = y_2 + 2y_3, \\ x_1 = y_1 - x_2 - x_3 = y_1 - y_2 - 2y_3 - y_3 = y_1 - y_2 - 3y_3. \end{cases}$$

Следовательно, матрица перехода от старого базиса $\mathfrak{B}_E$ к каноническому базису $\mathfrak{B}_F$ равна

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2 = -\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3 = -3\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3.\}$$



б) Следовательно квадратичная форма положительно определённая.

$$i_+ = 3, \quad i_- = 0, \quad r = 3.$$

в) Запишем матрицу квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 18 \end{pmatrix}.$$

Найдем её угловые главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 17 \end{vmatrix} = 18 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, форма $\varphi(\bar{x})$ положительно определённая. ◀



Пример 12.5. В некотором базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ задана квадратичная форма $\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 8x_3^2$.

а) Привести $\varphi(\bar{x})$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат и канонический базис $\mathfrak{B}_F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

б) Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$.

в) Исследовать $\varphi(\bar{x})$ на знакоопределённость двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

►а) Применяем метод Лагранжа.

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x}) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 8x_3^2 = \\&= (x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2) - (x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 8x_3^2 = \\&= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 - 3x_2^2 - 10x_2x_3 - 8x_3^2 = \\&= y_1^2 - 4x_2^2 - 12x_2x_3 - 9x_3^2 = y_1^2 - (2x_2 + 3x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2 = \varphi(\bar{y}).\end{aligned}$$

Привели квадратичную форму $\varphi(\bar{x})$ к каноническому виду

$$\varphi(\bar{y}) = y_1^2 - y_2^2.$$



Преобразование координат $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = 2x_2 + 3x_3. \end{cases}$ Определитель матрицы перехода равен нулю, следовательно квадратичная форма вырождена.

б) $\mathbf{i}_+ = 1, \mathbf{i}_- = 1, \mathbf{r} = 2.$ $\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = y_1^2 - y_2^2.$

в) Запишем матрицу квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Найдем её угловые главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \\ 1 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно критерию Сильвестра, форма $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ будет принимать как положительные так и отрицательные значения, т.е. знакопеременная.



Пример 11.6. Найти все значения параметра α , при которых квадратичная форма $\varphi(\bar{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4\alpha x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2\alpha x_2x_3$ является положительно определённой.

◀Выпишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}$$

►Найдем её угловые главные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4\alpha^2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{vmatrix} = 27 - 6\alpha^2.$$

Согласно критерию Сильвестра, форма $\varphi(\bar{x})$ будет положительно определённой при условии, что все три определителя положительны.

Решаем систему неравенств

$$\begin{cases} 6 - 4\alpha^2 > 0, \\ 27 - 6\alpha^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 < 1,5, \\ \alpha^2 < \frac{27}{6}. \end{cases}$$

$$\text{Получаем } |\alpha| < \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{26}}. \quad \blacktriangleleft$$



Пример 11.7. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить её тип. $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$.

◀ Рассмотрим матрицу квадратичной формы $\varphi(\bar{x}) = 3x^2 - 4xy + 3y^2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приведём её к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Найдём собственные значения.

Для этого решим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow (3 - \lambda)^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow \\ 3 - \lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5.$$

Найдём собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям.



1) $\lambda_1 = 1$.

Для этого решаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (3-1) & -2 \\ -2 & (3-1) \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая сводится к уравнению $2x - 2y = 0$.

Вектор $\bar{f}_1 = (1; 1)$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 1$.

2) $\lambda_1 = 5$.

Для этого решаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (3-5) & -2 \\ -2 & (3-5) \end{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которая сводится к уравнению $x + y = 0$.

Следовательно, вектор $\bar{f}_2 = (-1; 1)$ является собственным вектором матрицы A , соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 5$.

Несложно проверить, что собственные значения и соответствующие им собственные вектора найдены правильно. Для этого проверяем справедливость равенств:

$$A \cdot \bar{f}_1 = 1 \cdot \bar{f}_1 \quad \text{и} \quad A \cdot \bar{f}_2 = 5 \cdot \bar{f}_2.$$



Матрица квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ в каноническом базисе $\mathfrak{B}_\lambda = \{\bar{\mathbf{f}}_1 = (1; 1), \bar{\mathbf{f}}_2 = (-1; 1)\}$

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = u_1^2 + 5v_2^2$, где $\bar{\mathbf{y}} = (u; v)$ — новые координаты.

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \rightarrow \lambda} \mathbf{Y}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow \lambda} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Или в координатном виде

Или в координатном виде

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u + v. \end{cases}$$



Подставим полученные выражения в условия задачи

$$3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 6y - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$3(u - v)^2 - 4(u - v)(u + v) + 3(u + v)^2 + 4(u - v) - 6(u + v) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 3u^2 - 6uv + 3v^2 - 4u^2 + 4v^2 + 3u^2 + 6uv + 3v^2 + 4u - 4v - 6u - 6v - 5 = 0 \Rightarrow$$

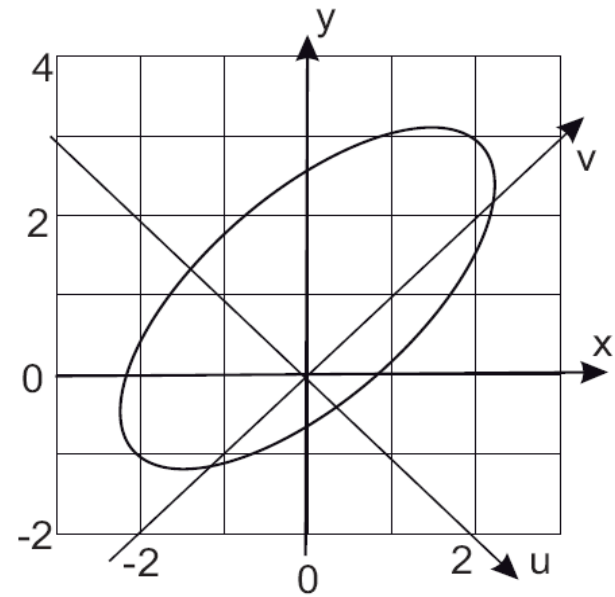
$$2u^2 + 10v^2 - 2u - 10v - 5 = 0 \Rightarrow u^2 + 5v^2 - u - 5v - 2,5 = 0 \Rightarrow$$

$$(u - 0,5)^2 + (v - 0,5)^2 = 4 \Rightarrow \frac{(u - 0,5)^2}{(2)^2} + \frac{(v - 0,5)^2}{(\sqrt{0,8})^2} = 1.$$

В новых координатах это каноническое уравнение эллипса с центром в точке $O'(0,5; 0,5)$ с полуосями $\sqrt{0,8}$ и 2. Оператор, задающий преобразование (11.3) является оператором поворота на угол $\pi/4$ против часовой стрелки относительно начала координат Oxy , рис. 14. ►

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u + v. \end{cases}$$

Это оператор поворота на угол 45 градусов против часовой стрелки



Пример 12.8. Привести квадратичную форму

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 - 6x_2x_3$$

к нормальному виду. Найти ранг, индексы инерции, сигнатуру и нормальный базис.

► В примере 12.5 найдено преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{6}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad (12.4)$$

приведшие заданную квадратичную форму к каноническому виду

$$\varphi(\bar{\mathbf{y}}) = 2y_1^2 - 3y_2^2 - 49/24 y_3^2.$$



Пример 11.3. Задана квадратичная форма $\varphi(\bar{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$. Привести $\varphi(\bar{x})$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат. Найти канонический базис.

► Так как коэффициент при x_1^2 не равен нулю, группируем подчёркнутые которые содержат x_1 и приводим к полному квадрату добавляя и вычитая выражения дополняющее подчёркнутые слагаемые до полного квадрата.

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{x}) &= \underline{2x_1^2} - x_2^2 - \underline{4x_1x_2} + \underline{5x_1x_3} - 6x_2x_3 + x_3^2 = \\ &= 2\left(x_1^2 - 2x_1\left(x_2 - \frac{5}{4}x_3\right) + \left(x_2 - \frac{5}{4}x_3\right)^2\right) - 2\left(x_2 - \frac{5}{4}x_3\right)^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 + \\ &+ x_3^2 = 2\left(x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3\right)^2 - 2x_2^2 + 5x_2x_3 - \frac{25}{8}x_3^2 - x_2^2 - 6x_2x_3 + x_3^2.\end{aligned}$$

Обозначим полученное линейное выражение в скобках $y_1 = x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3$. Теперь переменной x_1 в полученном квадратичном выражении нет. Аналогичные преобразования выполняем с оставшейся частью квадратичной формы содержащие переменные x_2 и x_3 .



$$2y_1^2 - \underline{3x_2^2} - \underline{x_2x_3} - \frac{17}{8}x_3^2 = 2y_1 - 3\left(x_2^2 + 2x_2\frac{1}{6}x_3 + \left(\frac{1}{6}x_3\right)^2\right) + 3\left(\frac{1}{6}x_3\right)^2 - \frac{17}{8}x_3^2 = 2y_1^2 - 3\left(x_2^2 + \frac{1}{6}x_3\right)^2 - \frac{49}{24}x_3^2.$$

Обозначим полученное линейное выражение в скобках $y_2 = x_2 + \frac{1}{6}x_3$ и ещё $y_3 = x_3$.

В результате получаем канонический вид квадратичной формы $\varphi(\bar{y}) = 2y_1^2 - 3y_2^2 - 49/24y_3^2$.

Выпишем преобразования приведшие заданную квадратичную форму к каноническому виду.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{6}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$



► В примере 12.5 найдено преобразование

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + \frac{5}{4}x_3, \\ y_2 = x_2 + \frac{1}{6}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \quad (12.4)$$

приведшие заданную квадратичную форму к каноническому виду

$$\varphi(\bar{y}) = 2y_1^2 - 3y_2^2 - 49/24 y_3^2.$$

Введём новые преобразования, приводящие каноническую форму к нормальному виду

$$z_1 = \sqrt{2}y_1, \quad z_2 = \sqrt{3}y_2, \quad z_3 = \frac{7}{2\sqrt{6}}. \quad (12.5)$$

В новых координатах получаем квадратичную форму нормального вида

$$\varphi(\bar{z}) = z_1^2 - z_2^2 + z_3^2.$$

Выпишем значение ранга, индексов инерции и сигнатуру

$$\mathbf{i}_+ = 2, \quad \mathbf{i}_- = 1, \quad \mathbf{r} = 3, \quad \sigma = 1.$$



Выразим старые переменные x_1, x_2, x_3 через новые — z_1, z_2, z_3 . Для этого обратим преобразование (12.4). Полученная система является треугольной, следовательно прямой ход метода Гаусса уже выполнен, выполняем обратный ход:

$$\begin{cases} x_3 = y_3, \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{6}y_3, \\ x_1 = y_1 + y_2 - \frac{3}{2}y_3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 - \frac{17}{7\sqrt{6}} z_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 - \frac{2}{7\sqrt{6}} z_3, \\ x_3 = \frac{12}{7\sqrt{6}} z_3. \end{cases}$$



Используем формулу преобразования координат

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}} \mathbf{Z}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_E$ в базис $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}} = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 1\sqrt{3} & -18/(7\sqrt{6}) \\ 0 & 1\sqrt{3} & -3/(7\sqrt{6}) \\ 0 & 0 & 12/(7\sqrt{6}) \end{pmatrix}.$$

Вектора канонического базиса $\mathfrak{B}_F$ выражаются через вектора старого базиса $\mathfrak{B}_E$ по формулам

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{f}}_1 = 1\sqrt{2}\bar{\mathbf{e}}_1, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 = 1\sqrt{3}\bar{\mathbf{e}}_1 + 1\sqrt{3}\bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{f}}_3 = -18/(7\sqrt{6})\bar{\mathbf{e}}_1 - 3/(7\sqrt{6})\bar{\mathbf{e}}_2 + 12/(7\sqrt{6})\bar{\mathbf{e}}_3. \end{cases}$$



РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирование



Лекция 11

Знакоопределенные квадратичные формы

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

22 апреля 2023г