РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Лекция 12

Евклидовы и метрические пространства

Берков Николай Андреевич

29 апреля 2023г

Определение евклидова пространства

Линейные пространства, рассмотренные в предыдущих лекциях, по своим свойствам во многом аналогичны трёхмерному пространству векторов $\mathbb{V}_3$, которые мы изучали в первом семестре нашего курса. Однако, такие важные понятия, как длина вектора, угол между векторами, расстояние между элементами, в них отсутствуют. В разделе аналитическая геометрии вводилось определение скалярного произведения двух векторов $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$, как произведения их длин на косинус угла между ними:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = |\overline{\mathbf{x}}||\overline{\mathbf{y}}| \cos(\widehat{xy}). \qquad (12.1)$$

При этом длина вектора $\overline{\mathbf{x}}$ и угол между векторами $\cos(\widehat{xy})$ вычисляются через скалярное произведение по формулам использующим координаты векторов $\overline{\mathbf{x}} = (x_1; \ldots; x_n)$.

$$|\overline{\mathbf{x}}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \qquad (12.2)$$

$$\cos(\widehat{xy}) = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{|x||y|}. \qquad (12.3)$$

Для общих линейных пространств понятие скалярного произведения вводится аксиоматически, и на основе скалярного произведения определяются геометрические понятия, аналогичные случаю пространства геометрических векторов из курса аналитической геометрии.

Определение 12.1. *Линейное пространство* $\mathbb{E}$ *называют* ***евклидовым пространством****, если в этом пространстве задано скалярное произведение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов* $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ *поставлено в соответствие действительное число* $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, *называемое скалярным произведением.*

Определение 12.2. *Скалярным произведением векторов* $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ *называется числовая функция* $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$, *для которой выполнены следующие условия (****аксиомы скалярного произведения****):*

1) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$;
2) $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}})$;
3) $(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$;
4) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geqslant 0$, *причём* $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) = 0$ *лишь в случае, когда* $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$,

где $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{E}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Скалярное произведение часто обозначают так же, как и произведение чисел, т.е. вместо $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ пишут $\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}$.

Скалярное произведение вектора на себя $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})$ называют скалярным квадратом (по аналогии с квадратом числа).

Другими словами, скалярное произведение это симметричная билинейная форма. Причём, соответствующая ей квадратичная форма — положительно определённая.

Пример 12.1. *Множество всех геометрических векторов трёхмерного пространства с определением скалярного произведения по формулам (12.1 – 12.3), является евклидовым пространством, так как при таком определении аксиомы 1)-4) выполняются.*

1) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$*;*
2) $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}})$*;*
3) $(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$*;*
4) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geqslant 0$

Пример 12.2. *На множестве всех геометрических векторов плоскости* Oxy $\overline{\mathbf{x}} = (x_1;\, x_2)$, $\overline{\mathbf{y}} = (y_1;\, y_2)$, *определим скалярное произведение по следующему правилу:*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1).$$

Проверить, что данную функция можно использовать в виде скалярного произведения на заданном множестве.

$$1)(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1) = x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 =$$

$= y_1(x_1 - x_2) + y_2(x_2 - x_1) = (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$. Аксиома выполняется.

Пусть $\overline{\mathbf{z}} = (z_1;\, z_2) \in \mathbb{V}_2,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

$$2)(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}) = (x_1 + z_1)(y_1 - y_2) + (x_2 + z_2)(y_2 - y_1) =$$

$$= x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1) + z_1(y_1 - y_2) + z_2(y_2 - y_1) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{z}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

Аксиома выполняется.

$$3)(\alpha\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \alpha x_1(y_1 - y_2) + \alpha x_2(y_2 - y_1) = \alpha((x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1)) =$$

$= \alpha(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$. Аксиома выполняется.

$$\boxed{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1)}$$

$$4)(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) = x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 - x_1) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2.$$

$(x_1 - x_2)^2 = 0$ при $x_1 = x_2$ т.е., для множестве векторов $\overline{\mathbf{x}} = (x_1;\ x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, четвёртая аксиома:$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geqslant 0$, причём $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) = 0$ лишь в случае, когда $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$ — не выполняется. Поэтому данная симметричная билинейная функция **не может** быть использована в качестве скалярного произведения, т.к. не все аксиомы выполняются. ►

Пример 12.3. *На множестве всех геометрических векторов плоскости* Oxy $\overline{\mathbf{x}} = (x_1; x_2)$, $\overline{\mathbf{y}} = (y_1; y_2)$, *введём определим скалярное произведение по следующему правилу:*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1(y_1 - y_2) + x_2(2y_2 - y_1).$$

Проверить, что данную функция можно использовать в виде скалярного произведения на заданном множестве.

►Легко поверить, что первые три аксиомы также выполняются. Докажем, что выполняется и четвёртая аксиома.

$4)(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) = x_1(x_1 - x_2) + x_2(2x_2 - x_1) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2.$

Получили сумму двух неотрицательных и одновременно не равных нулю слагаемых. 4-я аксиома выполняется.

Следовательно данная симметричная билинейная функция **может** быть использована в качестве скалярного произведения, т.к. все аксиомы выполняется. ◄

Пример 12.4. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ — *квадратная вещественная симметричная матрица порядка* n, *все угловые миноры которой положительны. В линейном пространстве* $\mathbb{R}^n$ *можно ввести скалярное произведение равенством*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

для любых $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n)$ *и* $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

►Проверим, что данный функционал можно использовать в качестве скалярного произведения. Проверяем выполнения всех гипотез.

1) Коммутативность скалярного произведения следует из симметрии матрицы $\mathbf{A}$. Можно внешнее суммирование выбрать по строчкам, а внутреннее по столбцам, а можно наоборот. Получаем,

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} y_i x_j = (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}).$$

$$2)\ (\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}},\, \overline{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_i+y_i)z_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_iz_i+y_iz_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iz_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_iz_j = (\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{z}}) + (\overline{\mathbf{y}},\, \overline{\mathbf{z}}).$$

$$3)\ (\alpha\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha x_i)y_j = \alpha\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = \alpha(\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{y}}).$$

$$4)\ (\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \varphi(\overline{\mathbf{x}}).$$

По критерию Сильвестра данная квадратичная форма положительно определённая, поэтому $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) \geqslant 0$. ◄

Пример 12.5. *Рассмотрим линейное пространство* $\mathbb{P}_{ab}$ *всех многочленов от одной переменной* t, *интегрируемых на отрезке* $[a;\, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Для произвольных многочленов* $f(t)$ *и* $g(t)$ *определим скалярное произведение по следующему правилу:*

$$(\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}}) = \int_a^b f(\tau)g(\tau)\, d\tau.$$

►Используя свойства определённого интеграла, легко проверить что все четыре аксиомы выполняются.

1) $(\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_a^b f(\tau)g(\tau)\, d\tau = \int\limits_a^b g(\tau)f(\tau)\, d\tau = (\overline{\mathbf{g}}, \overline{\mathbf{f}})$.

2) $(\overline{\mathbf{f}}+\overline{\mathbf{h}}, \overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_a^b (f(\tau)+h(\tau))g(\tau)\, d\tau = \int\limits_a^b f(\tau)g(\tau)\, d\tau + \int\limits_a^b h(\tau)g(\tau)\, d\tau =$

$= (\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}}) + (\overline{\mathbf{h}}, \overline{\mathbf{g}})$.

3) $(\alpha\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_a^b \alpha f(\tau)g(\tau)\, d\tau = \alpha\int\limits_a^b f(\tau)g(\tau)\, d\tau = \alpha(\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}})$.

4) $(\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{f}}) = \int\limits_a^b f(\tau)f(\tau)\, d\tau = \int\limits_a^b f^2(\tau)\, d\tau \geqslant 0$.

Это означает, что линейное пространство $\mathbb{P}_{ab}$ со скалярным произведением 13.5 является евклидовым пространством. ◄

Очевидно, что можно ввести скалярное произведение (12.4) на линейном пространстве $\mathbb{P}_n$ — полиномов степени не выше n, превратив его в евклидово пространство.

Пример 12.6. *В линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *формула*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \tag{12.6}$$

определяет скалярное умножение. Такое определение скалярного произведения векторов в $\mathbb{R}^n$ *называют стандартным, а само* $\mathbb{R}^n$ *— стандартным евклидовым арифметически пространством.*

Пример 12.7. *По аналогии с арифметическим евклидовым пространством, в произвольном n-мерном линейном пространстве $\mathbb{V}^n$ всегда можно ввести скалярное произведение как сумма произведений координат векторов заданных в некотором базисе $\mathfrak{B} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$. Пусть $\overline{\mathbf{x}} = x_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \overline{\mathbf{x}}_n\overline{\mathbf{e}}_n$ и* $\overline{\mathbf{y}} = y_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + y_n\overline{\mathbf{e}}_n \in \mathbb{V}$.

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n.$$

Пример 12.8. *В линейном пространстве $\mathbb{P}_n$ многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами, в качестве скалярного произведения можно выбрать сумму произведений коэффициентов при одинаковых степенях*

$$(\overline{\mathbf{f}}, \overline{\mathbf{g}}) = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n,$$

где $f(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$, $g(t) = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$.

Свойства скалярного произведения

Из определения скалярного произведения следует несколько простейших свойств. Пусть $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}}$, $\overline{\mathbf{z}}$ — произвольные векторы евклидова пространства $\mathbb{E}$, а $\alpha \in \mathbb{R}$.

Свойство 1. $(\overline{\mathbf{x}},\ \alpha\overline{\mathbf{y}}) = \alpha(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{y}})$.

$$\blacktriangleright(\overline{\mathbf{x}},\ \alpha\overline{\mathbf{y}}) = (\alpha\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{x}}) = \alpha(\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{x}}) = \alpha(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{y}}).\blacktriangleleft$$

Свойство 2. $(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}})$.

$$\blacktriangleright(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{y}}+\overline{\mathbf{z}},\ \overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{z}}).\blacktriangleleft$$

Свойство 3. $(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{0}}) = 0$.

$$(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{0}}) = (\overline{\mathbf{x}},\ 0\cdot\overline{\mathbf{0}}) = 0\cdot(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{0}}) = 0.$$

Свойство 4. $\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k\overline{\mathbf{x}}_k,\ \overline{\mathbf{y}}) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\overline{\mathbf{x}}_k,\ \overline{\mathbf{y}}_k),\ \ a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, m}.$

Свойство 5. Если векторы $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ евклидова пространства $\mathbb{E}$ и $(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{z}}) \Rightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$.

$$\blacktriangleright(\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{z}}) \Rightarrow (\overline{\mathbf{x}},\ \overline{\mathbf{z}}) - (\overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{z}}) = 0 \Rightarrow (\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}},\ \overline{\mathbf{z}}) = 0.$$

Последнее равенство верно для любого вектора $\overline{\mathbf{z}} \in \mathbb{E}$, следовательно $\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{0}} \Rightarrow \overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{y}}$. $\blacktriangleleft$

1) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}})$;
2) $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}})$;
3) $(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$;
4) $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \geqslant 0$

Свойство 4. $\sum\limits_{k=1}^{m}(a_k\overline{\mathbf{x}}_k,\, \overline{\mathbf{y}}) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\overline{\mathbf{x}}_k,\, \overline{\mathbf{y}}_k),\;\; a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1, m}$.

Свойство 1. $(\overline{\mathbf{x}},\, \alpha\overline{\mathbf{y}}) = \alpha(\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{y}})$.

Из второй и третьей аксиомы определения скалярного произведения и свойств скалярного произведения, следует,что скалярное произведение двух векторов представленных в виде линейной комбинации: $\overline{\mathbf{x}} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{\mathbf{e}}_i$ и $\overline{\mathbf{y}} = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j\overline{\mathbf{f}}_j$ можно записать в следующем виде

$$(\overline{\mathbf{x}},\, \overline{\mathbf{y}}) = (\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{\mathbf{e}}_i,\, \sum_{j=1}^{m} y_j\overline{\mathbf{f}}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j(\overline{\mathbf{e}}_i,\, \overline{\mathbf{f}}_j). \qquad (12.7)$$

Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 12.1. *Для любых двух векторов* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$ *евклидова пространства выполняется неравенство*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})^2 \leqslant (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}). \qquad (12.7)$$

Неравенство 12.7 называется ***неравенством Коши-Буняковского.***

При $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$ обе части неравенства 12.7 равны нулю согласно свойству 3. (**Свойство 3**. $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{0}}) = \overline{\mathbf{0}}$.)

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, в силу аксиомы 4) выполняется неравенство

$$(\alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, \alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) \geqslant 0.$$

Используя гипотезы и свойства скалярного произведения, преобразуем это неравенство.

$$(\alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}, \alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) = \alpha(\overline{\mathbf{x}}, \alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) - (\overline{\mathbf{y}}, \alpha\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) = \alpha^2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) - 2\alpha(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}).$$

Получили квадратное неравенство относительно параметра α
$\alpha^2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) - 2\alpha(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) \geqslant 0.$

Учитывая, что $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) > 0$, т.к. мы рассматриваем случай, когда $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$, следовательно, чтобы неравенство выполнялось для любого значения $\alpha \in \mathbb{R}$, дискриминант должен быть меньше или равен нулю, т.е.

$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})^2 - (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) \leqslant 0.$ Неравенство 12.7 доказано.▶

Теорема 12.2. *Равенство* $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})^2 = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}})$ *выполняется тогда и только тогда, когда векторы* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$ *линейно зависимы.*

◀Пусть $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ линейно зависимы. Тогда $\overline{\mathbf{y}} = \alpha\overline{\mathbf{x}}$. Подставляем эту зависимость в неравенство Коши-Буняковского.

$$(\overline{\mathbf{x}}, \alpha\overline{\mathbf{x}})^2 \leqslant (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})(\alpha\overline{\mathbf{x}}, \alpha\overline{\mathbf{x}}) \Rightarrow \alpha^2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})^2 \leqslant (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})\alpha^2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) \Rightarrow$$

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})^2 \leqslant (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})^2 \Rightarrow (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})^2 = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})^2. \blacktriangleright$$

Пример 12.9. *В случае линейного арифметического пространств* $\mathbb{R}^n$ *неравенство Коши-Буняковского превращается в* **неравенство Коши:**

$$(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + \ldots + y_n^2), \tag{12.8}$$

где $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{\mathbf{y}} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пример 12.10. *В евклидовом пространстве интегрируемых на отрезке* $[0; 1]$ *функций, неравенство Коши-Буняковского превращается в* **неравенство Шварца:**

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 g^2(x)dx. \tag{12.9}$$

По аналогии с аналитической геометрией в $\mathbb{R}^n$, дадим теперь определение длины вектора и угла между векторами.

***Определение* 12.3.** *Длиной вектора* $\overline{\mathbf{x}}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbb{E}$ *называется* $\sqrt{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})}$. *Длина вектора обозначается* $|\overline{\mathbf{x}}|$.

Если $\overline{\mathbf{x}} = (x_1; \ldots; x_n) \in \mathbb{E}$, следовательно

$$|\overline{\mathbf{x}}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{12.10}$$

***Определение* 12.4.** *Углом между векторами* $\overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ *в евклидовом пространстве* $\mathbb{E}$ *называется наименьший угол* φ *такой, что*

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})}{|\overline{\mathbf{x}}| \cdot |\overline{\mathbf{y}}|}. \tag{12.11}$$

Также как и в аналитической геометрии, угол между векторами $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ обозначается $(\widehat{\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}})$.

Согласно неравенству Коши-Буняковского 12.7 $|\cos\varphi| \leqslant 1$.

Следствие: 12.1. *(Из теоремы 12.1) Для произвольных векторов евклидова пространства выполнено неравенство треугольников*

$$|\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}| \leqslant |\overline{\mathbf{x}}| + |\overline{\mathbf{y}}|. \tag{12.12}$$

◀

$$(|\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}|)^2 = (\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) =$$

$$= |\overline{\mathbf{x}}|^2 + 2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + |\overline{\mathbf{y}}|^2 \leqslant |\overline{\mathbf{x}}|^2 + 2|\overline{\mathbf{x}}|\,|\overline{\mathbf{y}}| + |\overline{\mathbf{y}}|^2 = (|\overline{\mathbf{x}}| + |\overline{\mathbf{y}}|)^2.$$

Получили $(|\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{y}}|)^2 \leqslant (|\overline{\mathbf{x}}|+|\overline{\mathbf{y}}|)^2$. Извлекая корень квадратный от левой и правой части этого неравенства, получаем неравенство треугольников (12.14).

▶

Определение 12.5. *Расстоянием* $\rho(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})$ *между векторами* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$ *в евклидовом пространстве называется длина вектора* $\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}$.

Следствие: 12.2. *(Из теоремы 12.1) Если* $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}$ *и* $\overline{\mathbf{z}}$ *— произвольные векторы из евклидова пространства* $\mathbb{E}$, *то*

$$\rho(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + \rho(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}) \leqslant \rho(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}). \qquad (12.13)$$

►Применяем неравенство треугольников

$$\rho(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{z}}) = |\overline{\mathbf{z}} - \overline{\mathbf{x}}| = |(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}) - (\overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{z}})| \leqslant |\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{y}}| + |\overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{z}}| = \rho(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + \rho(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{z}}).$$

◄

Пример 12.11. *В евклидовом пространстве* $\mathbb{E}^4$ *найти длины векторов* $\overline{\mathbf{a}}_1 = (1,0,2,2)$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = (-1,1,1,-1)$ *и угол между ними.*

►Найдём скалярные произведения:

$$(\overline{\mathbf{a}}_1,\, \overline{\mathbf{a}}_2) = 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) = -1.$$

$$(\overline{\mathbf{a}}_1,\, \overline{\mathbf{a}}_1) = 1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 = 9.$$

$$(\overline{\mathbf{a}}_2,\, \overline{\mathbf{a}}_2) = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4.$$

Тогда длины векторов и косинус угла между ними равны

$$|a_1| = \sqrt{(\overline{\mathbf{a}}_1,\, \overline{\mathbf{a}}_1)} = 3.$$

$$|a_2| = \sqrt{(\overline{\mathbf{a}}_2,\, \overline{\mathbf{a}}_2)} = 2.$$

$$\cos(\widehat{\overline{\mathbf{x}}\,\overline{\mathbf{y}}}) = \frac{(\overline{\mathbf{a}}_1,\, \overline{\mathbf{a}}_2)}{|\overline{\mathbf{a}}_1|\,|\overline{\mathbf{a}}_2|} = -\frac{1}{6}. \blacktriangleright$$

Пример 12.12. *Найти длины элементов* $\overline{\mathbf{f}}(t) = 2t+1$, $\overline{\mathbf{g}}(t) = t-2$, $t \in [0;\,1]$ *и угол между ними, где* $\overline{\mathbf{f}}(t)$, $\overline{\mathbf{g}}(t)$ *элементы евклидового пространства всех многочленов со скалярным произведением* $(\overline{\mathbf{f}},\,\overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_0^1 \overline{\mathbf{f}}(t)\overline{\mathbf{g}}(t)\,dt$.

$$\blacktriangleright(\overline{\mathbf{f}},\,\overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int\limits_0^1 (2t+1)(t-2)\,dt = \int\limits_0^1 (2t^2-3t-2)\,dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{3t^2}{2}\bigg|_0^1 - 2t\bigg|_0^1 = -\frac{17}{6}.$$

$$(\overline{\mathbf{f}},\,\overline{\mathbf{f}}) = \int\limits_0^1 f^2(t)\,dt = \int\limits_0^1 (4t^2+4t+1)\,dt = \frac{4t^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{4t^2}{2}\bigg|_0^1 + t\bigg|_0^1 = \frac{13}{3}.$$

$$(\overline{\mathbf{g}},\,\overline{\mathbf{g}}) = \int\limits_0^1 g^2(t)\,dt = \int\limits_0^1 (t^2-4t+4)\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 - \frac{4t^2}{2}\bigg|_0^1 + 4t\bigg|_0^1 = \frac{7}{3}.$$

$$|\overline{\mathbf{f}}(t)| = \sqrt{13/3}; \qquad |\overline{\mathbf{g}}(t)| = \sqrt{7/3};$$

$$\cos(\widehat{\overline{\mathbf{f}}(t)\,\overline{\mathbf{g}}(t)}) = -\frac{17}{2\sqrt{91}}. \blacktriangleleft$$

Нормированные пространства

В линейном пространстве обобщением понятия длины свободного вектора является норма.

Определение 12.6. *Функцию, заданную на линейном пространстве* $\mathbb{L}$, *которая каждому вектору* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{L}$ *ставит в соответствие действительное число* $||\overline{\mathbf{x}}||$, *называют* ***нормой***, *если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:*

а) $||\overline{\mathbf{x}}|| \geqslant 0$, *причём равенство* $||x|| = 0$ *возможно только при* $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}}$;

б) $||\lambda\overline{\mathbf{x}}|| = |\lambda|||\overline{\mathbf{x}}||, \lambda \in \mathbb{R}$;

в) $||\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}|| \leqslant ||\overline{\mathbf{x}}|| + ||\overline{\mathbf{y}}||$ *(**неравенство треугольника**).*

Определение 12.7. *Линейное пространство, в котором задана норма вектора, называется* ***нормированным***.

Теорема 12.3. *Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле:* $||\overline{\mathbf{x}}|| = \sqrt{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}})}$. *Эта норма называется* ***евклидовой.***

► а) Согласно аксиомы 4) определения скалярного произведения, для всех $\overline{\mathrm{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ $(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}) \geqslant 0$. Следовательно и $||\overline{\mathrm{x}}|| \geqslant 0\ \forall \overline{\mathrm{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$.

б) $||\lambda\overline{\mathrm{x}}|| = \sqrt{(\lambda\overline{\mathrm{x}},\ \lambda\overline{\mathrm{x}})} = \sqrt{\lambda^2(\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{x}})} = |\lambda|\ ||\overline{\mathrm{x}}||$.

в) Используем неравенство Коши-Буняковского

$(\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{y}}) \leqslant \sqrt{(\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{x}})}\sqrt{(\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{y}})}$ и формулу $||\overline{\mathrm{x}}|| = \sqrt{(\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{x}})}$.

$$||\overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}}||^2 = (\overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{y}}) = (\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{x}}) + 2(\overline{\mathrm{x}},\ \overline{\mathrm{y}}) + (\overline{\mathrm{y}},\ \overline{\mathrm{y}}) \leqslant$$
$$\leqslant ||\overline{\mathrm{x}}||^2 + 2||\overline{\mathrm{x}}||\ ||\overline{\mathrm{y}}|| + ||\overline{\mathrm{y}}||^2 = (||\overline{\mathrm{x}}|| + ||\overline{\mathrm{y}}||)^2.$$ ◄

Для любого метрического пространства можно задать сколько угодно норм. Для примера рассмотрим действительное пространство $\mathbb{R}^n$ с элементами

$$\overline{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; \ldots; x_n).$$

Гёльдеровы нормы вектора.

$$||\overline{\mathbf{x}}|| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \; p \in \mathbb{N}. \tag{13.14}$$

Частные случаи данной нормы:

a) Метрика L_1, норма l_1 или манхэттенское расстояние.

$$||\overline{\mathbf{x}}||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

b) Метрика L_2, норма l_2 или евклидова норма.

$$||\overline{\mathbf{x}}||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

c) Предельный случай при $p \to \infty$.

$$||\overline{\mathbf{x}}||_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|.$$

Используя норму вектора можно дать следующее определение угла между ненулевыми векторами $\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$.

Определение 13.8. *Углом между ненулевыми векторами в нормированном пространстве называют значение* $\varphi \in [0, \pi)$, *определяемое равенством*

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}})}{||\overline{\mathbf{x}}|| \, ||\overline{\mathbf{y}}||}. \tag{13.18}$$

Пример 12.13. *В евклидовом пространстве* R^4 *найти угол* φ *между векторами, заданными в каноническом базисе:* $\overline{\mathbf{x}} = (-1;1;0;2)$, $\overline{\mathbf{y}} = (2;-1;1;0)$.

◀Канонический базис ортонормированный $\Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{-1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 2^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2 + 0^2}} = -0{,}5$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Пример 12.14. *Доказать, что в евклидовом пространстве* $C_{[0;1]}$ *угол* φ *между функциями* $f(x) = 2$ *и* $g(x) = 2x - 1$ *равен* $\pi/2$.

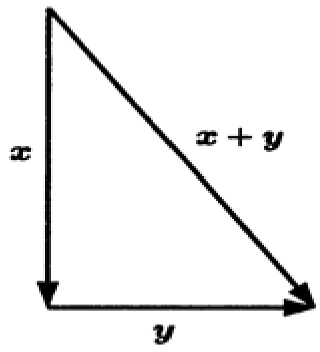
$$◀ (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 2(2x-1)\,dx = 2(x^2 - x)\Big|_0^1 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{(f, g)}{\sqrt{(f, f)}\sqrt{(g, g)}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}. \ ▶$$

Ортогональные системы векторов

Теорема 12.4. *(Теорема Пифагора)*
Если $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ *ортогональны, то* $||\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}||^2 = ||\overline{\mathbf{x}}||^2 + ||\overline{\mathbf{y}}||^2$.



$\blacktriangleleft ||\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}||^2 = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}})(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) + 2(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) =$

$= ||\overline{\mathbf{x}}||^2 + ||\overline{\mathbf{y}}||^2. \blacktriangleright$

Определение 12.10. *Вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{E}$ *называется* **нормированным**, *если* $||\overline{\mathbf{x}}|| = 1$.

Определение 12.11. *Система векторов* $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n\}, \overline{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{E}$ *называется ортогональной, если* $(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{x}}_j) = 0$, *при* $i \neq j$.

Определение 12.12. *Система векторов* $\{\overline{\mathbf{x}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n\}, \overline{\mathbf{x}}_i \in \mathbb{E}$ *называется ортонормированной, если* $(\overline{\mathbf{x}}_i, \overline{\mathbf{x}}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Числовая функция δ_{ij} называется **символом Кронекера**.

Утверждение. *Если векторы* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$ *ортогональны, то векторы* $\lambda\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\beta\overline{\mathbf{y}}$, *если* $\lambda\beta \neq 0$, *также ортогональны.*

◀Пусть векторы $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$ ортогональны $\Rightarrow$ $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0$.

Тогда, используя гипотезу 3) и свойство 1 скалярного произведения, получаем

$(\lambda\overline{\mathbf{x}}, \beta\overline{\mathbf{y}}) = \lambda(\overline{\mathbf{x}}, \beta\overline{\mathbf{y}}) = \lambda\beta(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = 0 \Rightarrow \lambda\overline{\mathbf{x}} \perp \beta\overline{\mathbf{y}}$. ▶

Теорема 12.5. *Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

► Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$. Система векторов является линейно независимой, если любая ее линейная комбинация равна нулевому вектору, только при условии равенства нулю всех коэффициентов в этой комбинации. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию этих векторов и докажем,что если она равна нулю,то все её коэффициенты также равны нулю. Пусть

$$\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_n = \overline{\mathbf{0}}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на $\overline{\mathbf{e}}_k$.

$$(\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \alpha_k\overline{\mathbf{e}}_k + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_n,\ \overline{\mathbf{e}}_k) = (\overline{\mathbf{0}},\ \overline{\mathbf{e}}_k) \ \Rightarrow$$

$$\alpha_1(\overline{\mathbf{e}}_1,\ \overline{\mathbf{e}}_k) + \ldots + \alpha_k(\overline{\mathbf{e}}_k,\ \overline{\mathbf{e}}_k) + \ldots + \alpha_n(\overline{\mathbf{e}}_n,\ \overline{\mathbf{e}}_k) = 0.$$

Векторы $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_k, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ ортогональны, следовательно все слагаемые кроме k-го обращаются в ноль. Получаем,

$$\alpha_k(\overline{\mathbf{e}}_k,\ \overline{\mathbf{e}}_k) = 0 \ \Rightarrow \alpha_k||\overline{\mathbf{e}}_k|| = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0.$$

Индекс k может принимать произвольное значение от 1 до n, следовательно мы доказали, что если линейная комбинация ортогональной системы ненулевых векторов $\alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_n = \overline{\mathbf{0}}$, тогда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Т.е. любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. ►

Теорема 12.6. *Любая ортогональная система из n векторов $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ в евклидовом пространстве размерности n образует базис.*

►Ранее доказывалось,что любая линейно-независимая система из n векторов в линейном пространстве размерности n образует базис. Т.к. согласно предыдущей теореме любая ортогональная система из n векторов $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ в евклидовом пространстве линейно-независима, следовательно, теорема доказана.◄

Пример 12.15. *В евклидовом пространстве* $C_{0;\pi}$ *система функций:* $\{\cos kx\,,\ k=\overline{1,n}\}$ *является ортогональной.*

►При $k \neq m$:

$$(\cos kx,\ \cos mx) = \int\limits_0^\pi \cos kx \cos mx\, dx = 0{,}5 \int\limits_0^\pi \cos(k+m)x +$$

$$+\cos(k-m)x\, dx = 0{,}5\left(\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + \frac{\sin(k-m)x}{k-m}\right)\Bigg|_0^\pi = 0.$$

Когда $k = m$:

$$(\cos kx,\ \cos kx) = \int\limits_0^\pi \cos^2 kx\, dx = 0{,}5 \int\limits_0^\pi (1+\cos(2k)x\, dx =$$

$$= 0{,}5\left(x + \frac{\sin(2kx)}{2}\right)\Bigg|_0^\pi = \pi/2.$$

Получили, $(\cos kx,\ \cos mx) = \begin{cases} 0 \text{ при } k \neq m, \\ \pi/2 \text{ при } k = m. \end{cases}$ ◄

Ортогональные и ортонормированные базисы

Определение 12.12. *Базис* $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ *называется ортонормированным, если все векторы* $\overline{\mathbf{e}}_i$ *единичной длины и попарно ортогональны, то есть:*

$$(\overline{\mathbf{e}}_i, \overline{\mathbf{e}}_j) = \begin{cases} 1 \ \textit{при} \ i = j, \\ 0 \ \textit{при} \ i \neq j. \end{cases} \tag{12.19}$$

Ортогональный базис $\{\overline{\mathbf{f}}_1, \dots, \overline{\mathbf{f}}_n\}$ легко превратить в ортонормированный $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$, если каждый вектор разделить на его норму.

$$\{\overline{\mathbf{e}}_1, \dots, \overline{\mathbf{e}}_n\}) = \left\{ \frac{\overline{\mathbf{f}}_1}{||\overline{\mathbf{f}}_1||}, \dots, \frac{\overline{\mathbf{f}}_1}{||\overline{\mathbf{f}}_1||} \right\}. \tag{12.20}$$

Координатная форма скалярного произведения векторов $\overline{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, \overline{\mathbf{x}}_n)$ и $\overline{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, \overline{\mathbf{y}}_n)$ заданных в ортонормированном базисе вычисляется по формуле:

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Норма вектора $||\overline{\mathbf{x}}|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$

Пример 12.16. *Доказать, что система из трёх векторов:* $\overline{\mathbf{a}} = (1;\ 0;\ -1), b = (1;\ 0;\ 1), c = (0;1;0)$ *в евклидовом арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^3$ *образует ортогональный базис.*

►Выпишем матрицу перехода к базису $\{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдём её определитель: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Следовательно, система векторов $\{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\}$ — линейно независима и образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Докажем, что этот базис ортогональный. Для этого рассмотрим попарные скалярные произведения:

$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) = 0,\ (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) = 0,\ (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = 0 \ \Rightarrow \{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\}$ — ортогональный базис.

Этот базис не является ортонормированным, так как $||\overline{\mathbf{a}}|| = ||\overline{\mathbf{b}}|| = \sqrt{2} \neq 1$.

Чтобы этот базис сделать ортонормированным, нужно векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ разделить на их нормы, т.е. на число $\sqrt{2}$.

Базис $\left\{\overline{\mathbf{f}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overline{\mathbf{f}}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overline{\mathbf{f}}3 = (0;\ 1;\ 0)\right\}$ — ортонормированный. ◄

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Лекция 12

Евклидовы и метрические пространства

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

29 апреля 2023г