

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования

Лекция 13

Евклидовы и метрические пространства

Матрица Грама

Берков Николай Андреевич

6 мая 2023г



Основные определения и теоремы из 12 лекции

Определение 12.1. Линейное пространство $\mathbb{E}$ называют евклидовым пространством, если в этом пространстве задано скалярное произведение, т.е. закон или правило, согласно которому каждой паре векторов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{E}$ поставлено в соответствие действительное число $(\bar{x}, \bar{y})$, называемое скалярным произведением.

Определение 12.2. Скалярным произведением векторов $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{E}$ называется числовая функция $(\bar{x}, \bar{y})$, для которой выполнены следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

$$1) (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x});$$

$$2) (\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z});$$

$$3) (\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y});$$

$$4) (\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, \text{ причём } (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \text{ лишь в случае, когда } \bar{x} = \bar{0},$$

$$\text{где } \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{E}, \lambda \in \mathbb{R}.$$



Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 12.1. Для любых двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ евклидова пространства выполняется неравенство

$$(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}). \quad (12.7)$$

Неравенство 12.7 называется неравенством Коши-Буняковского.

Определение 12.3. Длиной вектора $\bar{x}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ называется $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$. Длина вектора обозначается $|\bar{x}|$.

Определение 12.4. Углом между векторами $\bar{x} \neq \bar{0}$ и $\bar{y} \neq \bar{0}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ называется наименьший угол φ такой, что

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}. \quad (12.11)$$

СЛЕДСТВИЕ: 12.1. (Из теоремы 12.1) Для произвольных векторов евклидова пространства выполнено неравенство треугольников

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|. \quad (12.12)$$



Нормированные пространства

В линейном пространстве обобщением понятия длины свободного вектора является норма.

Определение 12.6. Функцию, заданную на линейном пространстве $\mathbb{L}$, которая каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{L}$ ставит в соответствие действительное число $\|\bar{x}\|$, называют нормой, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

- а) $\|\bar{x}\| \geq 0$, причём равенство $\|x\| = 0$ возможно только при $\bar{x} = \bar{0}$;
- б) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|, \lambda \in \mathbb{R}$;
- в) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство треугольника).

Определение 12.7. Линейное пространство, в котором задана норма вектора, называется нормированным.

Теорема 12.3. Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле: $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$. Эта норма называется евклидовой.

Теорема 12.4. (Теорема Пифагора)

Если $\bar{x}$ и $\bar{y} \in \mathbb{E}$ ортогональны, то $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$.



Определение 12.10. Вектор $\bar{x} \in \mathbb{E}$ называется нормированным, если $\|\bar{x}\| = 1$.

Определение 12.11. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}, \bar{x}_i \in \mathbb{E}$ называется ортогональной, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$, при $i \neq j$.

Определение 12.12. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}, \bar{x}_i \in \mathbb{E}$ называется ортонормированной, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Числовая функция δ_{ij} называется символом Кронекера.

Утверждение. Если векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ортогональны, то векторы $\lambda\bar{x}$ и $\beta\bar{y}$, если $\lambda\beta \neq 0$, также ортогональны.

◀ Пусть векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ортогональны $\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Тогда, используя гипотезу 3) и свойство 1 скалярного произведения, получаем

$$(\lambda\bar{x}, \beta\bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \beta\bar{y}) = \lambda\beta(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \lambda\bar{x} \perp \beta\bar{y}. \blacktriangleright$$



Теорема 12.5. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

◀ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$. Система векторов является линейно независимой, если любая её линейная комбинация равна нулевому вектору, только при условии равенства нулю всех коэффициентов в этой комбинации. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию этих векторов и докажем, что если она равна нулю, то все её коэффициенты также равны нулю. Пусть

$$\alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{e}}_n = \bar{\mathbf{0}}.$$

Умножим обе части равенства скалярно на $\bar{\mathbf{e}}_k$.

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_k) &= (\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{e}}_k) \Rightarrow \\ \alpha_1 (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_k) + \dots + \alpha_k (\bar{\mathbf{e}}_k, \bar{\mathbf{e}}_k) + \dots + \alpha_n (\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Векторы $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ ортогональны, следовательно все слагаемые кроме k -го обращаются в ноль. Получаем,

$$\alpha_k (\bar{\mathbf{e}}_k, \bar{\mathbf{e}}_k) = 0 \Rightarrow \alpha_k |\bar{\mathbf{e}}_k|^2 = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0.$$



Индекс k может принимать произвольное значение от 1 до n , следовательно мы доказали, что если линейная комбинация ортогональной системы ненулевых векторов $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$, тогда $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Т.е. любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима. ►

Теорема 12.6. Любая ортогональная система из n векторов $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ в евклидовом пространстве размерности n образует базис.

◄ Ранее доказывалось, что любая линейно-независимая система из n векторов в линейном пространстве размерности n образует базис. Так как, согласно предыдущей теореме, любая ортогональная система из n векторов $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ в евклидовом пространстве линейно-независима, следовательно, теорема доказана. ►



Пример 12.15. В евклидовом пространстве $C_{0;\pi}$ система функций: $\{\cos kx, k = \overline{1, n}\}$ является ортогональной.

► При $k \neq m$:

$$\begin{aligned} (\cos kx, \cos mx) &= \int_0^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0,5 \int_0^{\pi} \cos(k+m)x + \\ &+ \cos(k-m)x \, dx = 0,5 \left(\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right) \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Когда $k = m$:

$$\begin{aligned} (\cos kx, \cos kx) &= \int_0^{\pi} \cos^2 kx \, dx = 0,5 \int_0^{\pi} (1 + \cos(2k)x) \, dx = \\ &= 0,5 \left(x + \frac{\sin(2kx)}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \pi/2. \end{aligned}$$

$$\text{Получили, } (\cos kx, \cos mx) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m, \\ \pi/2 & \text{при } k = m. \end{cases} \blacktriangleleft$$



Ортогональные и ортонормированные базисы

Определение 12.12. Базис $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ называется ортонормированным, если все векторы $\bar{\mathbf{e}}_i$ единичной длины и попарно ортогональны, то есть:

$$(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (12.19)$$

Ортогональный базис $\{\bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ легко превратить в ортонормированный $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$, если каждый вектор разделить на его норму.

$$\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\} = \left\{ \frac{\bar{\mathbf{f}}_1}{\|\bar{\mathbf{f}}_1\|}, \dots, \frac{\bar{\mathbf{f}}_n}{\|\bar{\mathbf{f}}_n\|} \right\}.$$

Координатная форма скалярного произведения векторов $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{\mathbf{y}} = (y_1, \dots, y_n)$ заданных в ортонормированном базисе вычисляется по формуле:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

$$\text{Норма вектора } \|\bar{\mathbf{x}}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$



Пример 13.16. Доказать, что система из трёх векторов:
 $\bar{a} = (1; 0; -1), b = (1; 0; 1), c = (0; 1; 0)$ в евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^3$ образует ортогональный базис.

► Выпишем матрицу перехода к базису $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдём её определитель: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Следовательно, система векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ — линейно независима и образует базис в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Докажем, что этот базис ортогональный. Для этого рассмотрим попарные скалярные произведения:

$(\bar{a}, \bar{b}) = 0, (\bar{a}, \bar{c}) = 0, (\bar{b}, \bar{c}) = 0 \Rightarrow \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ — ортогональный базис.



$$\bar{\mathbf{a}} = (1; 0; -1), \bar{\mathbf{b}} = (1; 0; 1), \bar{\mathbf{c}} = (0; 1; 0)$$

Этот базис не является ортонормированным, так как $||\bar{\mathbf{a}}|| = ||\bar{\mathbf{b}}|| = \sqrt{2} \neq 1$.

Чтобы этот базис сделать ортонормированным, нужно векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ разделить на их нормы, т.е. на число $\sqrt{2}$.

$\left\{ \bar{\mathbf{f}}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \bar{\mathbf{f}}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \bar{\mathbf{f}}_3 = (0; 1; 0) \right\}$ — ортонормированный базис. ►



Матрица Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово, $A = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$ — система векторов пространства $\mathbb{E}$.

Определение 13.13. Матрицей Грама системы векторов A называется матрица, составленная из скалярных произведений

$$G_A = \begin{pmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & (\bar{a}_1, \bar{a}_2) & \dots & (\bar{a}_1, \bar{a}_n) \\ (\bar{a}_2, \bar{a}_1) & (\bar{a}_2, \bar{a}_2) & \dots & (\bar{a}_2, \bar{a}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{a}_n, \bar{a}_1) & (\bar{a}_n, \bar{a}_2) & \dots & (\bar{a}_n, \bar{a}_n) \end{pmatrix}. \quad (13.21)$$

Определение 13.14. Определителем Грама системы векторов A называется определитель матрицы Грама.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ задан некоторый базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. Матрицей Грама этого базиса является матрица

$$G_{\mathfrak{B}_E} = \begin{pmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_1) & (\bar{e}_1, \bar{e}_2) & \dots & (\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ (\bar{e}_2, \bar{e}_1) & (\bar{e}_2, \bar{e}_2) & \dots & (\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{e}_n, \bar{e}_1) & (\bar{e}_n, \bar{e}_2) & \dots & (\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}. \quad (13.22)$$



Матрица Грама на базисных векторах $\mathfrak{B}_E$ совпадает с матрицей квадратичной формы.

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\bar{\mathbf{x}} = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + x_n\bar{\mathbf{e}}_n$ и $\bar{\mathbf{y}} = y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_n\bar{\mathbf{e}}_n \in \mathbb{E}$:

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= (x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + x_n\bar{\mathbf{e}}_n, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_n\bar{\mathbf{e}}_n) = \\ &= x_1y_1(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) + x_1y_2(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) + \dots + x_ny_n(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}x_iy_j, \text{ где } g_{ij} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j). \end{aligned}$$

Теорема 13.1. Для любых векторов $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ скалярное произведение можно представить в виде:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{Y}. \quad (13.3)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}x_iy_j = \\ &= (\bar{\mathbf{x}}_1 \dots \bar{\mathbf{x}}_n) \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_n) \\ (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & (\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{Y}. \blacktriangleright \end{aligned}$$



Замечание 13.1. В ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_N$ матрица Грама $\mathbf{G}_N$ является единичной матрицей.

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 13.2. В ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_N$ скалярное произведение вычисляется по формуле:

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (13.4)$$



Свойство определителя Грама.

Пусть дана система векторов $\mathbf{A} = \{\bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$. Приведём свойства определителя Грама G_A на этой системе векторов.

1) $\det G_A \geq 0$.

2) $\det G_A = 0 \Leftrightarrow$ система векторов $\mathbf{A}$ линейно зависима.

3) Определитель Грама системы векторов $\mathbf{A} = \{\bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ равен квадрату объёма n -мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах.

4) Все элементы стоящие на главной диагонали матрицы Грама должны быть положительными.



Теорема 13.2. (критерий матрицы Грама).

Квадратная матрица $\mathbf{G}$ порядка n является матрицей Грама скалярного произведения в любом базисе $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ пространства $\mathbb{E}$, тогда и только тогда, когда она симметричная и положительно определённая, т.е. все её главные миноры положительные.

◀ **Необходимость.** Пусть $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}$ — матрица Грама базиса $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E} \Rightarrow g_{ij} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) = (\bar{\mathbf{e}}_j, \bar{\mathbf{e}}_i) = g_{ji}$ (в силу аксиомы 1 скалярного произведения) $\Rightarrow$ матрица Грама симметричная.

Так как $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{G}$ — матрица квадратичной формы $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$. По аксиоме 4 скалярного произведения $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) > 0$, при $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$ — положительно определённая квадратичная форма. Поэтому по критерию Сильвестра все главные миноры её матрицы $\mathbf{G}$ положительные.

Достаточность. Если $\mathbf{G}$ — симметричная и положительно определённая матрица, то $\det \mathbf{G} > 0 \Rightarrow$ столбцы матрицы $\mathbf{G}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $\mathbb{E}$. Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — вектор-столбцы координат векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ в этом базисе, то матрица $\mathbf{G}$ задаёт некий закон (правило):

$$\mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{Y} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}),$$

удовлетворяющий аксиомам и свойствам скалярного произведения $\Rightarrow \mathbf{G}$ — матрица Грама. ►



Пример 13.1. Могут ли быть матрицами Грама следующие матрицы:

a) $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; b) $G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; c) $G_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

◀а) G_1 — не является матрицей Грама, так как матрица не симметрична.

b) G_2 — не является матрицей Грама, так как $\det G_2 = -3 < 0$.

с) G_3 — является матрицей Грама, так как выполняются все условия критерия: матрица симметрична, оба угловые миноры положительны.

d) G_4 — не является матрицей Грама, так как элемент в третьей строке на главной диагонали отрицателен. Элементы на главной диагонали равны скалярному квадрату $g_{ii} = (\bar{\mathbf{a}}_i, \bar{\mathbf{a}}_i)$, следовательно они не могут быть отрицательными. Поэтому в данном примере нет необходимости находить главные миноры. ►



Теорема 13.3. Пусть $\mathbf{G}_E$ — матрица Грама системы векторов $\mathbf{A} = \{\bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ евклидова пространства $\mathbb{E}$, заданных в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$. При переходе к новому базису $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ матрица Грамма $\mathbf{G}_F$ вычисляется по формуле:

$$\mathbf{G}_F = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_E \mathbf{P}. \quad (13.5)$$

где $\mathbf{P}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$.

◀ Пусть $\mathbf{X}_E$ и $\mathbf{Y}_E$ — столбцы координат векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ в базисе $\mathfrak{B}_E$, а $\mathbf{X}_F$ и $\mathbf{Y}_F$ — в базисе $\mathfrak{B}_F$. Тогда

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= \mathbf{X}_E^T \mathbf{G}_E \mathbf{Y}_E = (\mathbf{P} \mathbf{X}_F)^T \mathbf{G}_E (\mathbf{P} \mathbf{Y}_F) = \mathbf{X}_F^T (\mathbf{P}^T \mathbf{G}_E \mathbf{P}) \mathbf{Y}_F = \mathbf{X}_F^T \mathbf{G}_F \mathbf{Y}_F \\ &\Rightarrow \mathbf{G}_F = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_E \mathbf{P}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$



Пример 13.2. Базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ задан своими координатами в ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\} : \bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 1; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (2; 0; 1), \bar{\mathbf{e}}_3 = (1; 1; 0)$. Найти матрицу Грама в базисе $\mathfrak{B}_E$.

◀Рассмотрим два способа решения данной задачи.

1 способ, основанный на определении матрицы Грама:

элементы матрицы Грама $g_{ij} = (\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j)$. Так как система векторов $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ задана в ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_I$, то

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) &= 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3, & (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 3, \\ (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_3) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, & (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2) &= 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 5, \\ (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2, & (\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_3) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

$$G_E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$



Пример 13.2. Базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ задан своими координатами в ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\} : \bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 1; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (2; 0; 1), \bar{\mathbf{e}}_3 = (1; 1; 0)$. Найти матрицу Грама в базисе $\mathfrak{B}_E$.

2 способ, основанный на формуле перехода матрицы Грама к новому базису.

В ортонормированном базисе $\mathfrak{B}_I$ матрица Грама единичная. Применяем формулу $\mathbf{G}_E = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_I \mathbf{P}$, где $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_I$ к базису $\mathfrak{B}_E$.

$$\mathbf{G}_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$



Пример 13.3. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ найти угол между векторами $\bar{x} = (1; -1; 0; 2)$ и $\bar{y} = (-1; 2; 1; 0)$, заданными в каноническом базисе.

◀ Канонический базис ортонормированный, следовательно угол между векторами находится по формуле (12.19)

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}.$$

Подставляя координаты векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, получаем

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 0 + 0}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1 + 0}} = -0,5.$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}. \blacktriangleright$$



Пример 13.4. В базисе $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$, дана матрица Грама $G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

- Найти:
- 1) Длины базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$.
 - 2) Угол между базисными векторами $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$.
 - 3) Длины заданных векторов $\bar{\mathbf{x}} = (1; 2)$ и $\bar{\mathbf{y}} = (-2; 1)$.
 - 4) Угол между векторами $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$.

◀1) Найдём длины базисных векторов:

$$|\bar{\mathbf{e}}_1| = \sqrt{(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)} = \sqrt{3}, \quad |\bar{\mathbf{e}}_2| = \sqrt{(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2)} = \sqrt{5}.$$

2) Угол между базисными векторами:

$$\widehat{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2} = \arccos \frac{(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)}{|\bar{\mathbf{e}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{e}}_2|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{15}} = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

3, 4) Вычислим длины данных векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ и угол между ними.

Для вычисления скалярного произведения используем формулу (13.3) $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{Y}$.

$$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7.$$

$$|\bar{\mathbf{x}}|^2 = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 19.$$

$$|\bar{\mathbf{y}}|^2 = (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = (-2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = 21.$$



Длина вектора $\bar{x} = \sqrt{19}$.

Длина вектора $\bar{y} = \sqrt{21}$.

Найдём угол между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$

$$(\widehat{\bar{x}, \bar{y}}) = \arccos \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} = \arccos \frac{7}{\sqrt{19 \cdot 21}} = \arccos\left(\sqrt{\frac{7}{57}}\right). \blacktriangleright$$



Пример 13.5. В базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$, дана матрица $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$.

1) Показать, что матрица G является матрицей Грама.

2) Найти длины базисных векторов и углы между ними.

3) Найти длины векторов $\bar{\mathbf{x}} = (1; 2; 0)$ и $\bar{\mathbf{y}} = (-1; 0; 2)$ и угол между ними.

4) Найти матрицу Грама в базисе $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3\}$, где $\bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{f}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{f}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_3$.

1) Показать, что матрица G является матрицей Грама.

- Матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть для всех i и j выполняется равенство $a_{ij} = a_{ji}$.

- все угловые миноры положительны,

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

- на главной диагонали все элементы положительны.

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит данная матрица G является матрицей Грама.



2) Найти длины базисных векторов и углы между ними. Используем определение матрицы Грама (13.2).

$$\mathbf{G}_E = \begin{pmatrix} (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) & (\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_3) \\ (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2) & (\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3) \\ (\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_1) & (\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_2) & (\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_3) \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём длины векторов

$$|\bar{\mathbf{e}}_1| = \sqrt{(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1)} = \sqrt{2}, \quad |\bar{\mathbf{e}}_2| = \sqrt{(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2)} = \sqrt{2}, \quad |\bar{\mathbf{e}}_3| = \sqrt{(\bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_3)} = \sqrt{5}.$$

Найдём углы между базисными векторами

$$\widehat{\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2} = \arccos \frac{(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)}{|\bar{\mathbf{e}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{e}}_2|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\widehat{\bar{\mathbf{e}}_1 \bar{\mathbf{e}}_3} = \arccos \frac{(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_3)}{|\bar{\mathbf{e}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{e}}_3|} = \arccos \frac{0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\widehat{\bar{\mathbf{e}}_2 \bar{\mathbf{e}}_3} = \arccos \frac{(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3)}{|\bar{\mathbf{e}}_2| \cdot |\bar{\mathbf{e}}_3|} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \arccos \frac{-1}{\sqrt{10}} = \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$



3) Найти длины векторов $\bar{x} = (1; 2; 0)$ и $\bar{y} = (-1; 0; 2)$ и угол между ними.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = -8.$$

$$|\bar{x}|^2 = (\bar{x}, \bar{x}) = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 14.$$

Длина вектора $\bar{x} = \sqrt{14}$.

$$|\bar{y}|^2 = (\bar{y}, \bar{y}) = (-1 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1 \ 0 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 10 \end{pmatrix} = 22.$$

Длина вектора $\bar{y} = \sqrt{22}$.

Найдём угол между векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$

$$\widehat{\bar{x}\bar{y}} = \arccos \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|} = \arccos \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{22}} = \arccos \left(\frac{-4}{\sqrt{77}} \right).$$



4) Найти матрицу Грама в базисе $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3\}$, где $\bar{\mathbf{f}}_1 = \bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Применяем формулу $\mathbf{G}_F = \mathbf{P}^T \mathbf{G}_E \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – матрицы перехода от базиса $\mathfrak{B}_F$ к базису $\mathfrak{B}_E$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{G}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли полученная матрица матрицей Грама:

- матрица симметрична;
- все главные миноры строго положительны: $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = 13$;
- диагональные элементы положительны.

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит полученная матрица $\mathbf{G}_F$ является матрицей Грама. ►



РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Лекция 13

Евклидовы и метрические пространства

Матрица Грама

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

6 мая 2023г