

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 2

*Линейная зависимость и независимость системы
векторов в линейном пространстве.
Базис линейного пространства*

Берков Николай Андреевич
18 февраля 2023г

Определение 1.1. (*Аксиоматика линейного пространства*).

Непустое множество V элементов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ любой природы, называемых векторами, называется *линейным, или векторным пространством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. В V определены две операции: *сложение векторов* $\bar{x} + \bar{y}$ и *умножение вектора* $\bar{x}$ на скаляр α – так, что множество V *замкнуто* относительно этих операций:

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V: \bar{x} + \bar{y} \in V;$

2) для любого числа α и любого элемента $\bar{x} \in V$ определён элемент $\alpha\bar{x} \in V$ (произведение элемента $\bar{x}$ на число α).

2. Причём эти операции обладают следующими свойствами:

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (*коммутативность сложения*);

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (*ассоциативность сложения*);

3) в V существует нулевой элемент (нуль) $\bar{0} \in V$, такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x} \forall \bar{x} \in V$ (*существование нуля*);

4) для каждого элемента $\bar{x} \in V \exists$ элемент $(-\bar{x}) \in V$, называемый *противоположным* элементу $\bar{x}$, такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ (умножение на 1 не изменяет элемент);

6) $\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x}$ (умножение на число ассоциативно);

7) $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов);

8) $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей).



Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 1.2. *Линейной комбинацией* элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ пространства $\mathbb{V}$ называется вектор равный сумме произведений этих элементов на произвольные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, называемые коэффициентами линейной комбинации.

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n. \quad (1.1)$$

Определение 1.3. Система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ линейного пространства $\mathbb{V}$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, неравные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}. \quad (1.2)$$

Определение 1.4. Система векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ линейного пространства $\mathbb{V}$ называется **линейно независимой**, если из равенства (1.2), следует, что $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$.

Определение 1.5. Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ линейного пространства $\mathbb{V}$ называется **полной**, если любой вектор $\bar{x} \in \mathbb{V}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы:
$$\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n.$$



Теорема 1.1. Система состоящая из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор $\bar{0}$.

◀ $\alpha_1 \bar{x}_1 = \bar{0}$. Это равенство выполняется для $\alpha_1 \neq 0$, только когда $\bar{x} = \bar{0}$. ▶

Теорема 1.2. Критерий линейной зависимости системы векторов. Для того чтобы система векторов $S = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}, n \geq 2$ линейного пространства V , была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих элементов являлся линейной комбинацией других.

◀ **Необходимость.**

Пусть система векторов S линейно-зависима. Тогда, если

$\alpha_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = \bar{0}$, тогда существует хотя бы один коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Следовательно, можно выразить вектор $\bar{a}_i$ как линейную комбинацию других

векторов. $\bar{a}_i = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_i} \bar{a}_k$.

Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть $\bar{a}_i$ вектор является линейной комбинацией других векторов.

$$\bar{a}_i = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \alpha_k \bar{a}_k.$$

Перепишем данное соотношение в виде

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}, \text{ где } \alpha_i = 1.$$

Достаточность доказана. ▶



Базис и размерность линейного пространства

Определение 1.6. Базисом $\mathfrak{B}$ в линейном пространстве $\mathbb{V}$ называется любой упорядоченный набор его n элементов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, если выполняются два условия:

- 1) эти элементы независимы;
- 2) любое подмножество в $\mathbb{V}$, состоящее из $n + 1$ -го элемента и включающее все n элементов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, линейно зависимо.

Замечание 1.3. Второе условие эквивалентно условию полноты системы векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Определение 1.7. Линейное пространство $\mathbb{V}$ называется **n -мерным** и обозначается $\mathbb{V}_n$, если в нём существует базис, состоящий из n элементов.

При этом число n принято называть размерностью пространства $\mathbb{V}$ и обозначать $\dim(\mathbb{V})$.

Определение 1.8. Линейное пространство $\mathbb{V}$ называется **бесконечномерным**, если в нём существует любое число линейно независимых элементов.



Теорема 1.3. Для каждого элемента $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}_n$ существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$.

◀ Если $\bar{\mathbf{x}}$ произвольный вектор пространства $\mathbb{V}_n$, то, по определению базиса, система векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{x}}$ линейна зависима. Следовательно, элемент $\bar{\mathbf{x}}$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \alpha_n \bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\mathbf{e}}_i. \quad (1.3)$$

Тем самым доказано существование разложения.

Для доказательства единственности, предположим, что существует другая линейная комбинация $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{\mathbf{e}}_i$.

Тогда получаем, что $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{0}}$.

Так как система базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ независима, следовательно $\alpha_i = \beta_i, 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, единственность представления произвольного вектора $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ в виде (1.3) доказана. ▶



Определение 1.9. Если $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ — базис $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbb{V}$, то равенство

$$\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n \quad (1.4)$$

называется **разложением вектора $\bar{\mathbf{x}}$ по базису $\mathfrak{B}$** , а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются **координатами вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbb{V}$** .

Теорема 1.4. Координаты суммы (разности) векторов линейного пространства $\mathbb{V}$ равны сумме (разности) координат.

◀ Пусть $\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n$ и $\bar{\mathbf{y}} = y_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + y_n \bar{\mathbf{e}}_n \in \mathbb{V}$.

Тогда $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} = (x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n) \pm (y_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + y_n \bar{\mathbf{e}}_n) = (x_1 \pm y_1) \bar{\mathbf{e}}_1 + (x_2 \pm y_2) \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + (x_n \pm y_n) \bar{\mathbf{e}}_n$. ▶

Теорема 1.5. Координаты произведения вектора $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ равны произведению координат на число.

◀ Пусть $\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n$. Тогда $\alpha \bar{\mathbf{x}} = \alpha(x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n) = (\alpha x_1) \bar{\mathbf{e}}_1 + (\alpha x_2) \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + (\alpha x_n) \bar{\mathbf{e}}_n$. ▶



Теорема 1.7. В n -мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ каждую систему из k ($k < n$) линейно-независимых векторов $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_k$ можно дополнить до базиса $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_k, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n$.

◀ К системе линейно-независимых векторов $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_k$ добавим $(k+1)$ -й вектор, таким образом, чтобы расширенная система $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{x}}_{k+1}$ также была линейно-независимой. Это можно сделать, иначе k векторов были бы базисом. Этот алгоритм выполняем до тех пор пока не добавим n -й вектор. ▶



n -мерное арифметическое пространство

Рассмотрим важный пример n -мерного линейного пространства, элементами которого служат упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а сложение и умножение на число определяется формулами

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \overline{x} &= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).\end{aligned}$$

В математическом анализе данное пространство называется n -мерным арифметическим пространством и обозначается символом $\mathbb{R}^n$.

Замкнутость данного множества относительно операций сложения и умножения на число, следует из определения этих операций.

Нулевым элементом рассматриваемого множества является элемент $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$. Противоположным элементом для элемента $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является элемент $(\overline{-x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

В качестве базиса $\mathfrak{B}$ к данному пространству $\mathbb{R}_n$, выберем простейшую систему из n векторов

[illegible]



Докажем линейную независимость данной системы элементов линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Для этого рассмотрим произвольную линейную комбинацию базисных векторов

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{e}}_n &= \\ &= \alpha_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, 0, \dots, 1) = \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Это линейная комбинация равна $\bar{\mathbf{0}}$ лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Это и есть условие независимости системы векторов (2.1) $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$.

Любой элемент $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n.$$

Следовательно, при добавлении к данной системе ещё одного вектора $\bar{\mathbf{x}}$ получается линейно зависимая система элементов.

Таким образом, мы доказали, что $\mathbb{R}^n$ является линейным пространством, а система из n элементов (2.1) является базисом данного линейного пространства и любой элемент $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ можно разложить по данному базису.



Теорема 2.1. Если V — линейное пространство размерности n , то любая система состоящая из n независимых элементов этого пространства образует базис.

◀ Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ — произвольная система n линейно независимых элементов n -мерного линейного пространства V .

Добавим в эту систему ещё элемент $\bar{x} \in V$. Тогда система из $n + 1$ -го элемента $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{x}\}$ линейно зависима.

Следовательно, существуют, не все равные нулю, числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что справедливо равенство

$$\alpha_0 \bar{x} + \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}. \quad (2.2)$$

Очевидно, что $\alpha_0 \neq 0$, так как элементы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ независимы, следовательно, $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$ только для при всех $\alpha_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Из (2.2) получаем

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \text{ где } x_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_0}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Таким образом, произвольный элемент $\bar{x}$ линейного пространства V однозначно разложен по линейно независимой системе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. Т.е. эти вектора образуют базис. ◀



Критерий линейной независимости векторов

Пусть задана система из n векторов: $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$, заданных в пространстве $\mathbb{V}$ своими координатами в каком-либо базисе $\mathfrak{B}_E: \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$. Разработаем критерий по которому можно определить образуют ли базис $\mathfrak{B}_A$ данная система векторов.

Предположим, что система векторов $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ линейно независима. Разложим каждый из векторов заданной системы по базисным векторам:

[illegible]

В силу единственности разложения векторов $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ по базису $\mathfrak{B}_E$, получаем равенство

$$\alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n = \bar{\mathbf{0}},$$

которое равносильно однородной системе линейных алгебраических однородных уравнений

[illegible]



Так как по предположению система векторов $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ линейно независима, то полученная система имеет единственное тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Следовательно, однородная система линейных уравнений имеет единственное решение, когда главный определитель системы отличен от нуля.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.4)$$

Учитывая, что операция транспонирования матрицы не изменяет значения определителя, равенство (2.4) можно записать в виде

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.5)$$



Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть даны два базиса линейного пространства $\mathbb{V}$: $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$. Каждый вектор $\bar{\mathbf{f}}_i, i = 1, 2, \dots, n$ из базиса $\mathfrak{B}_F$ может быть разложен по первому базису $\mathfrak{B}_E$:

[illegible]

Замечание 2.1. У коэффициентов p_{ij} первый индекс указывает на порядковый номер базисного вектора в первом базисе

$\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$, а второй — на порядковый номер базисного вектора во втором базисе $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$.

Формулу (2.6) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}}^T \mathbf{e}, \quad (2.7)$$

где

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1 \\ \bar{\mathbf{f}}_2 \\ \dots \\ \bar{\mathbf{f}}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \dots \\ \bar{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Определение 2.1. Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}}$, столбцами которой являются координаты векторов базиса $\mathfrak{B}_{\mathbf{F}}$ в базисе $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}}$, называется матрицей перехода от базиса $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ к базису $\mathfrak{B}_{\mathbf{F}} = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$.



Свойства матрицы перехода

1. Матрица перехода от одного базиса к другому определяется однозначно.

◀Вытекает из определения матрицы перехода. Она состоит из столбцов координат базисных векторов одного базиса в другом.▶

2. Всякая матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$ — невырождена, т.е. её определитель не равен нулю.

▶Это следует из того, что между двумя базисами существует взаимно-однозначное соответствие. Если бы столбцы матрицы перехода были линейно зависимы, тогда были бы зависимы и элементы базиса $\mathfrak{B}_F$, а это означает, что система векторов $\mathfrak{B}_F$ не является базисом, что противоречит постановке задачи. ◀

Следовательно, формулу (2.7) можно записать в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{e}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T)^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.9)$$

Используя свойство обратной матрицы $(\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T)^{-1} = (\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1})^T$,

формулу (2.9) можно записать в виде

$$\mathbf{e} = (\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1})^T \mathbf{f}. \quad (2.10)$$



Напомним, что обратная матрица $\mathbf{P}^{-1}$, вычисляется по формулам:

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где Δ — определитель матрицы перехода $\mathbf{P}$, P_{ij} — алгебраические дополнения элементов p_{ij} матрицы $\mathbf{P}$, стоящих на пересечении i -той строки и j -того столбца.

Формулу перехода (2.10) от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$ можно записать в развёрнутом виде

[illegible]



Пример матрицы перехода

Пример 2.1. Векторы $\bar{\mathbf{a}} = (-2; 5; 1)$, $\bar{\mathbf{b}} = (3; 2; -7)$, $\bar{\mathbf{c}} = (4; -3; 2)$, $\bar{\mathbf{d}} = (-4; 22; 13)$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ линейного пространства V_3 . Показать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ образуют базис $\mathfrak{B}_A$ пространства V_3 и выписать матрицу $P_{I \rightarrow A}$ перехода к этому базису. Найти разложение вектора $\bar{\mathbf{d}}_A$ по этому базису. Сделать проверку.

[illegible]

► Для заданной системы векторов матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = \\ &= -2(4 - 21) - 3(10 + 3) + 4(-35 - 2) = 34 - 39 - 148 = -153 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система векторов $\bar{\mathbf{a}} = (-2, 5, 1), \bar{\mathbf{b}} = (3, 2, -7), \bar{\mathbf{c}} = (4, -3, 2)$ образует базис в пространстве $\mathbb{V}_3$. Матрицей перехода к полученному базису является матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}}$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём теперь координаты вектора $\bar{\mathbf{d}}$ в новом базисе $\mathfrak{B}_{\mathbf{A}}$. $\bar{\mathbf{d}} = (-4, 22, -13)$

$\bar{\mathbf{d}}_{\mathbf{A}} = x\bar{\mathbf{a}} + y\bar{\mathbf{b}} + z\bar{\mathbf{c}}$, где x, y, z координаты вектора $\bar{\mathbf{d}}$ в новом базисе.

Это уравнение можно записать в виде

$$x(-2; 5; 1) + y(3; 2; -7) + z(4; -3; 2) = (-4; 22; -13).$$

Приравнивая координаты векторов в левой и правой части уравнения, запишем его в виде системы линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x + 3y + 4z = -4, \\ 5x + 2y - 3z = 22, \\ x - 7y + 2z = -13. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $x = 3, y = 2, z = -1$.

Следовательно, в новом базисе координаты вектора $\bar{\mathbf{d}}$ равны

$$\bar{\mathbf{d}}_{\mathbf{A}} = 3\bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{c}} = (3; 2; -1).$$

Для проверки подставим координаты базисных векторов

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= 3\bar{\mathbf{a}} + 2\bar{\mathbf{b}} - \bar{\mathbf{c}} = 3(-2; 5; 1) + 2(3; 2; -7) - (4; -3; 2) = \\ &= (3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 4; 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3; 3 + 2 \cdot (-7) - 2) = (-4; 22; -13). \end{aligned}$$



Примеры базисов линейных пространств

1) Множество вещественных чисел $\mathbb{R}_1$. $\dim(\mathbb{R}_1) = 1$.

Базис: $\bar{e} = 1$. $\bar{x} \in \mathbb{R}_1$, $\bar{x} = \alpha \cdot \bar{e}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Множество векторов на плоскости $\mathbb{R}_2$. $\dim(\mathbb{R}_2) = 2$.

Базис: любые два неколлинеарных вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$. $x \in \mathbb{R}_2$,
 $\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Канонический базис: $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$,
 $|\bar{e}_1| = 1, |\bar{e}_2| = 1, \bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$.

3) Множество векторов в пространстве $\mathbb{V}_3$. $\dim(\mathbb{V}_3) = 3$. Базис:
любые три некопланарных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$. $\dim(\mathbb{V}_3) = 3$.

$\bar{x} \in \mathbb{V}_3$, $\bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Канонический
базис: $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

4) Множество $\mathbb{P}_n$ всех многочленов $P_n(t)$ степени не выше n .

$\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

Базис: $\bar{e}_1(t) = t^0 = 1$; $\bar{e}_2(t) = t^1$; $\bar{e}_3(t) = t^2$; $\dots$; $\bar{e}_n(t) = t^{n-1}$; $\bar{e}_{n+1}(t) = t^n$.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n = \\ &= a_0 \bar{e}_1(t) + a_1 \bar{e}_2(t) + a_2 \bar{e}_3(t) + \dots + a_{n-1} \bar{e}_n(t) + a_n \bar{e}_{n+1}(t). \end{aligned}$$



5) Множество всех n -компонентных столбцов $\mathbb{C}ol^n$.

$\dim(\mathbb{C}ol^n) = n$. Базис: n элементарных столбцов

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots; \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{x} \in \mathbb{C}ol^n, \bar{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$



6) Множество всех квадратных матриц второго порядка $\mathbb{M}_2$.

$\dim(\mathbb{M}_2) = 4$. Базис:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2, \quad A = a_{11}\bar{e}_1 + a_{12}\bar{e}_2 + a_{21}\bar{e}_3 + a_{22}\bar{e}_4.$$

7) Обобщение примера 6. Множество $\mathbb{M}_{nm}$ всех матриц размерности $n \times m$.

$\dim(\mathbb{M}_{nm}) = n \cdot m$. Базис: $n \cdot m$ различных матриц в которых только один элемент равен 1, а все остальные нулевые, как в предыдущем примере.

8) Множество $\mathbb{A}x$ решений однородной системы m линейных алгебраических уравнений $Ax = 0$ с n неизвестными.

Базис: фундаментальная система решений $\{\bar{\alpha}_1; \bar{\alpha}_2; \dots; \bar{\alpha}_{n-r}\}$.



- 9) $C[-\pi; \pi]$ — Множество непрерывных функций на отрезке $[-\pi; \pi]$. $\dim(C[-\pi; \pi]) = \infty$. Базис: бесконечная система элементарных функций по которой можно разложить любую непрерывную функцию на отрезке $[-\pi; \pi]$. Пример такого базиса: $\{1, \{\sin nx, \cos nx | n \in \mathbb{N}\}\}$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx + b_n \cos nx), a_n, b_n \in \mathbb{R}.$$

Это разложение непрерывной функции в ряд Фурье.



Пример 1. Рассмотрим $C_{[0;2\pi]}$ – линейное пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0; 2\pi]$. Доказать, что система функций $\{1, \sin^2 x, \cos 2x\} \in C_{[0;2\pi]}$ линейно зависима.

Решение. Так как $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2x \Rightarrow$
по теореме 2 система функций $\{1, \sin^2 x, \cos 2x\}$ линейно зависима.



Пример 2. Рассмотрим $M_{2 \times 2}$ – пространство матриц размера 2×2 . Проверить на линейную зависимость систему матриц $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \in M_{2 \times 2}$.

Решение. Пусть $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$E_1 + E_2 - 3E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, система матриц $\{E_1, E_2, E_3\}$ – линейно зависима.



Пример 3. В линейном пространстве функций, определенных и непрерывных на интервале $(-\infty; +\infty)$, проверить на линейную зависимость систему функций $\{1, e^t, e^{-t}\}$.

Решение. Выпишем линейную комбинацию функций:

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{-t} = 0.$$

Для нахождения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нужно составить систему из трех уравнений.

1) $t = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0}.$

2) $(\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{-t})' = 0 \Rightarrow \lambda_2 e^t - \lambda_3 e^{-t} = 0 \Rightarrow$
при $t = 0$ получим уравнение: $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$.

3) $(\lambda_2 e^t - \lambda_3 e^{-t})' = 0 \Rightarrow \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{-t} = 0 \Rightarrow$
при $t = 0$ получим уравнение: $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ по определению, функции $\{1, e^t, e^{-t}\}$ линейно независимые



Исследовать на линейную зависимость систему функций можно с помощью определителя Вронского.

Рассмотрим функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ определенные на некотором интервале $x \in (a, b)$ и имеющие производные до $(n - 1)$ -го порядка включительно.

Определение. *Определителем Вронского (вронскианом) $W(x)$ системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ называется определитель вида:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема 3 (необходимое условие линейной зависимости функций).

Если система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейна зависима на интервале (a, b) , то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале ($W(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$).

Замечание. Обратное утверждение неверно. Определитель Вронского линейно независимой системы функций может быть тождественно равен нулю.



Пример 4. Исследовать на линейную зависимость систему функций:

$$\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

Решение. Формулы гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 1 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = x \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - x \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x =$$
$$= x(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = x \neq 0.$$

Следовательно, система функций $\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ линейно независимая.



Пример 5. Доказать линейную независимость системы функций:

$$\{1, x, \sin x, \cos x\}, x \in \mathbb{R}.$$

Решение. Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{1, x, \sin x, \cos x\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & \sin x & \cos x \\ 0 & 1 & \cos x & -\sin x \\ 0 & 0 & -\sin x & -\cos x \\ 0 & 0 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = -(\sin x)^2 - (\cos x)^2 = -1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Следовательно, система функций $\{1, x, \sin x, \cos x\}$ – линейно независимая.





Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

