РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Линейная алгебра И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Предэкзаменационная консультация

Берков Николай Андреевич

15 июня 2023г

1.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Рассмотрим произвольное вещественное линейное пространство V с элементами $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \ldots$.

Определение 1.2. ***Линейной комбинацией*** *элементов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *пространства* $\mathbb{V}$ *называется вектор равный сумме произведений этих элементов на произвольные действительные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *называемые коэффициентами линейной комбинации.*

$$\alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{x}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{x}}_n. \qquad (1.1)$$

Определение 1.3. *Система векторов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***линейно зависимой***, *если существует числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *неравные нулю одновременно, такие, что*

$$\alpha_1\overline{\mathbf{x}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{x}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{x}}_n = \overline{\mathbf{0}}. \qquad (1.2)$$

Определение 1.4. *Система векторов* $\overline{\mathbf{x}}_1, \overline{\mathbf{x}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{x}}_n$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***линейно независимой***, *если из равенства (1.2), следует, что* $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Определение 1.5. *Система векторов* $\{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***полной***, *если любой вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ *можно представить в виде линейной комбинации векторов системы:* $\overline{\mathbf{x}} = \alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{\mathbf{e}}_n$.

Определение 17.5. *Базисом в линейном пространства V называется любой упорядоченный набор его n элементов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, если выполняются два условия:*

1) *эти элементы независимые;*
2) *любое подмножество в V, состоящее из $n+1$-го элемента и включающее все n элементов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, линейно зависимо.*

Определение 1.7. *Линейное пространство $\mathbb{V}$ называется n-**мерным** и обозначается $\mathbb{V}_n$, если в нём существует базис, состоящий из n элементов.*

Теорема 1.3. *Для каждого элемента $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}_n$ существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных векторов $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$.*

Определение 1.9. *Если $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$ — базис $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbb{V}$, то равенство*

$$\overline{\mathbf{x}} = x_1\overline{\mathbf{e}}_1 + x_2\overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + x_n\overline{\mathbf{e}}_n \qquad (1.4)$$

*называется **разложением вектора $\overline{\mathbf{x}}$ по базису** $\mathfrak{B}$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\mathfrak{B}$ векторного пространства $\mathbb{V}$.*

Теорема 2.1. *Если $\mathbb{V}$ — линейное пространство размерности n, то любая система состоящая из n независимых элементов этого пространства образует базис.*

Линейные подпространства

Определение 3.1. *Непустое подмножество* $\mathbf{M}$ *пространства* $\mathbb{V}$ *называется* ***линейным подпространством*** *пространства* $\mathbb{V}$, *если выполняются два условия:*

1) *если* $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbf{M}$, *то* $\overline{x}, +\overline{y} \in \mathbf{M}$ *(замкнутость подпространства относительно операции сложения);*
2) *если* $\overline{x}, \in \mathbf{M}$, *а* α *число, то* $\alpha\overline{x} \in \mathbf{M}$ *(замкнутость подпространства относительно операции умножения на скаляр).*

Матрица линейного оператора.

Запишем разложение образы базисных векторов в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = a_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_{n1}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = a_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_{n2}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_n = a_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2n}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + a_{nn}\bar{\mathbf{e}}_n. \end{cases} \tag{5.6}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение 5.19. *Пусть $\widehat{\mathbf{A}}$ — линейный оператор из $L(\mathbb{V})$. Если $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ — базис n-мерного линейного пространства $\mathbb{V}$ и известно разложение образов этих базисных векторов $\widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jk}\bar{\mathbf{e}}_j$, то матрица $A = ||a_{jk}||$ называется матрицей линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в заданном базисе $\mathfrak{B}_E$.*

Теорема 5.5. *(о матрице линейного оператора в новом базисе) Матрицы $\mathbf{A}_E$ и $\mathbf{A}_F$ оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$ соответственно связаны соотношением*

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F}\mathbf{A}_E\mathbf{P}_{E\to F}. \tag{5.9}$$

Образ и ядро линейного оператора

Определение 6.1. *Образом* $Im\,\widehat{\mathbf{A}}$ *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$ *называется множество всех векторов* $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$, *представимых в виде* $\overline{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}}$.

$$Im\,\widehat{\mathbf{A}} = \left\{ \overline{\mathbf{y}} \,\middle|\, \overline{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}},\ \forall \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V} \right\}. \qquad (6.1)$$

Определение 6.2. *Ядром* $Ker\,\widehat{\mathbf{A}}$ *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$ *называется множество тех векторов* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$, *для которых* $\widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \{\,\overline{\mathbf{0}}\,\}$.

$$Ker\,\widehat{\mathbf{A}} = \left\{ \overline{\mathbf{x}} \,\middle|\, \widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \{\,\overline{\mathbf{0}}\,\},\ \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V} \right\}. \qquad (6.2)$$

Определение 6.3. *Рангом* $\boldsymbol{rang}\,\widehat{\mathbf{A}}$ *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ *называется размерность образа оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$, *т.е.* $\boldsymbol{rang}\,\widehat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{dim}(Im\,\widehat{\mathbf{A}})$

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Рассмотрим n-мерное векторное пространство $\mathbb{V}$ и линейный оператор $\widehat{\mathbf{A}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$.

Определение 7.1. *Ненулевой вектор* $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ *называется* ***собственным вектором*** *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$, *если существует действительное число* λ *такое, что*

$$\widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}}, \qquad \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}. \tag{7.1}$$

Действительное число λ *называется* ***собственным значением*** *или* ***собственным числом*** *оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$, *если существует ненулевой вектор* $\overline{\mathbf{x}}$ *такой, что выполняется равенство (7.1).*

При наличии равенства (7.1) вектор $\overline{\mathbf{x}}$ *называется* ***собственным вектором*** *оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$, *соответствующим собственному значению* λ, *а* λ — ***собственным значением***, *соответствующим собственному вектору* $\overline{\mathbf{x}}$.

Теорема 7.1. *Совокупность всех собственных векторов линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, *относящихся к одному и тому же собственному значению* λ, *вместе с нулевым вектором образуют подпространство пространства* $\mathbb{V}$.

Теорема 7.2. *Пусть собственные значения* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ *различны. Тогда отвечающие им собственные векторы* $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_k$ *линейно независимы.*

Определение 7.2. *Многочлен* $det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ *называется* ***характеристическим многочленом*** *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$, *а уравнение (7.11) —* ***характеристическим уравнением*** *линейного оператора* $\widehat{\mathbf{A}}$.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность

Определение 11.10. *Квадратичная форма называется* ***положительно определённой****, если* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) > 0 \ \ \forall\, \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$.

Определение 11.11. *Квадратичная форма называется* ***отрицательно определённой****, если* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) < 0 \ \ \forall\, \overline{\mathbf{x}} \neq \overline{\mathbf{0}}$.

Определение 11.12. *Если существуют такие* $\overline{\mathbf{x}}$ *и* $\overline{\mathbf{y}}$*, что* $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) > 0$*, а* $\varphi(\overline{\mathbf{y}}) < 0$*, то такая квадратичная форма называется* ***знакопеременной****, или* ***квадратичной формой общего вида****.*

2 способ — по критерию Сильвестра.

(1) Квадратичная форма **положительно определена** тогда и только тогда, когда все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.

(2) Квадратичная форма **отрицательно определена** тогда и только тогда, когда знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса.

(3) во всех остальных случаях квадратичная форма общего вида.

Матрица Грама

Пусть $\mathbb{E}$ — евклидово, $\mathbf{A} = \{\overline{\mathrm{a}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{a}}_n\}$ — система векторов пространства $\mathbb{E}$.

Определение 13.13. ***Матрицей Грама*** *системы векторов* $\mathbf{A}$ *называется матрица, составленная из скалярных произведений*

$$\mathbf{G}_A = \begin{pmatrix} (\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_1) & (\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{a}}_1, \overline{\mathrm{a}}_n) \\ (\overline{\mathrm{a}}_2, \overline{\mathrm{a}}_1) & (\overline{\mathrm{a}}_2, \overline{\mathrm{a}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{a}}_2, \overline{\mathrm{a}}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\overline{\mathrm{a}}_n, \overline{\mathrm{a}}_1) & (\overline{\mathrm{a}}_n, \overline{\mathrm{a}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{a}}_n, \overline{\mathrm{a}}_n) \end{pmatrix}. \tag{13.21}$$

Пусть в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ задан некоторый базис $\mathfrak{B}_E = \{\overline{\mathrm{e}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{e}}_n\}$. Матрицей Грама этого базиса является матрица

$$\mathbf{G}_{\mathfrak{B}_E} = \begin{pmatrix} (\overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_1) & (\overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{e}}_1, \overline{\mathrm{e}}_n) \\ (\overline{\mathrm{e}}_2, \overline{\mathrm{e}}_1) & (\overline{\mathrm{e}}_2, \overline{\mathrm{e}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{e}}_2, \overline{\mathrm{e}}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\overline{\mathrm{e}}_n, \overline{\mathrm{e}}_1) & (\overline{\mathrm{e}}_n, \overline{\mathrm{e}}_2) & \ldots & (\overline{\mathrm{e}}_n, \overline{\mathrm{e}}_n) \end{pmatrix}. \tag{13.22}$$

Теорема 13.1. *Для любых векторов* $\overline{\mathbf{x}}$, $\overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{E}$ *скалярное произведение можно представить в виде:*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{Y}. \tag{13.3}$$

Замечание 13.1. *В ортонормированном базисе* $\mathfrak{B}_N$ *матрица Грама* $\mathbf{G}_N$ *является единичной матрицей.*

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 13.2. *В ортонормированном базисе* $\mathfrak{B}_N$ *скалярное произведение вычисляется по формуле:*

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{13.4}$$

Теорема 13.2. *(**критерий матрицы Грама**).*
Квадратная матрица $\mathbf{G}$ *порядка* n *является матрицей Грама скалярного произведения в любом базисе* $\mathfrak{B} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n\}$ *пространства* $\mathbb{E}$, *тогда и только тогда, когда она симметричная и положительно определённая, т.е. все её главные миноры положительные.*

Примерный вариант № 1

1.В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы системы векторов $\mathbf{A} = \{(1;\ 4;\ 2),\ (-2;\ 1;\ 2),\ (0;\ 1;\ -3)\}$ и $\mathbf{B}=\{(-1;\ 2;\ 2),\ (-3;\ -3;\ 0),\ (-5\text{-}8;\ -2)\}$. Определить, какая из систем образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

2. Найти базис линейного подпространства $\mathbb{L}=\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x}= (2a+3b;\ a-2b;\ 4a-b), a, b \in \mathbb{R}\}$ и координаты вектора $\overrightarrow{x} = (4; -5; -6) \in \mathbb{L}$ в этом базисе.

3. Найти матрицу линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в каноническом базисе и образ вектора $\overrightarrow{c}= (1; -3)$, если $\widehat{\mathrm{A}}\,\overrightarrow{x}= (2x_1+5x_2; 5x_1-4x_2)$.

4. Найти собственные значения линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ и записать матрицу оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ в базисе из собственных векторов.

5. Для линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ из задачи 4 найти собственные векторы. Выписать один из базисов, в котором матрица оператора будет диагональной.

6. Найти ядро линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$.

7. Выписать матрицу квадратичной формы $\varphi(\overrightarrow{x}) = 2x_1^2-6x_1x_2+4x_1x_3+4x_2^2+6x_2x_3-5x_3^2$ и с помощью нее найти значение квадратичной формы $\varphi(\overrightarrow{x})$ на векторе $\overrightarrow{a} = (-1; 2; 1)$.

8. Для системы векторов $\{\overrightarrow{e}_1= (-1; 5), \overrightarrow{e}_2= (4; -1)\}$, заданных в ортонормированном базисе, записать матрицу Грама.

9. Исследовать квадратичную форму, заданную матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 14 \end{pmatrix}$ на знакоопределенность (положительно определенная, отрицательно определенная или общего вида).

Примерный вариант №2

1. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы системы векторов $\mathbf{A} = \{(-1;\ 2;\ 1), (-2;\ -1;\ 7), (-1;\ -8;\ 11)\}$ и $\mathbf{B}=\{(2;\ 1;\ -4), (2;\ 1;\ -1), (1;\ 2;\ 0)\}$. Определить, какая из систем является линейно независимой в $\mathbb{R}^3$.
%*Ответ: **B** $det\ A = 0,\ det\ B = -9.$
2. Найти базис линейного подпространства $\mathbb{L}=\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} = (a+3b;\ -3a+2b;;\ 2a+b), a, b \in \mathbb{R}\}$ и координаты вектора $\overrightarrow{x} = (7;1;4) \in \mathbb{L}$ в этом базисе.
%*Ответ: $\overrightarrow{x} = (1;2)$.
3. Найти матрицу линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в каноническом базисе и образ вектора $\overrightarrow{c} = (2;4)$, если $\widehat{\Lambda}\overrightarrow{x} = (2x_1 - 5x_2; 2x_1 + 3x_2)$.
%*Ответ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad c = (-16;\ 16)$
4. Найти собственные значения линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ и записать матрицу оператора $\widehat{\Lambda}$ в базисе из собственных векторов.
%*Ответ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
5. Для линейного оператора $\widehat{\Lambda}$ из задачи 4 найти собственные векторы. Выписать один из базисов, в котором матрица оператора будет диагональной.
%*Ответ: $\{\overrightarrow{x}_1 = (c_1; c_1),\ \overrightarrow{x}_2 = (c_2, 5c_2),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.\qquad E : \{(1;1),\ (1;5)\}.$
6. Найти ядро линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 20 & -35 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\{(7c;\ 4c), c \in \mathbb{R}\}$

7. Выписать квадратичную форму $\varphi(\overrightarrow{x})$ по ее матрице $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ и найти значение $\varphi(\overrightarrow{x})$ на векторе $\overrightarrow{a} = (5;2;-2)$.
Ответ: -24
8. Матрица Грама в базисе $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$. Найти угол между базисными векторами.
Ответ: $5\pi/6$
9. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\overrightarrow{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 15x_3^2$ на знакоопределенность (положительно определенная, отрицательно определенная или общего вида).
Ответ: "d1= -2,"d2= 7,"d3= -13 отрицательно определенная

Решение варианта №1

1.В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы системы векторов **A** = {(1; 4; 2), (-2; 1; 2), (0; 1; -3)} и **B**={(-1; 2; 2), (-3; -3; 0), (-5-8; -2)}. Определить, какая из систем образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

◄ Согласно теоремы 2.1, если $\mathbb{V}$ — линейное пространство размерности n, то любая система состоящая из n независимых элементов этого пространства образует базис.

Для определения линейной независимости системы векторов **A** и **B**, найдем ранги матриц **A** и **B**, состоящих из строк систем векторов. Если они равны размерности линейного пространства $\mathbb{R}^3$, то такая система векторов образует базис. Следовательно, если матрица не вырождена, то система векторов образует базис, а в если матрица вырождена, то система векторов не образует базис. Найдем определители матриц **A** и **B**

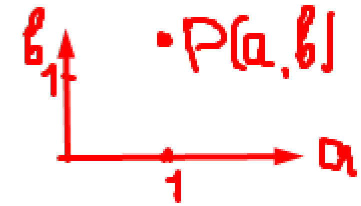
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -33.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -5 & -8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, система векторов **A** образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$, а система векторов **B** не образуют базис этого линейного пространства. ►

Ответ: $\boxed{\textbf{A} \text{ – образует базис.} \quad \det A = -33,\ \det B = 0.}$

2. Найти базис линейного подпространства $\mathbb{L}=\{\vec{x}\mid \vec{x}=(2a+3b;\ a-2b;\ 4a-b), a,b\in\mathbb{R}\}$ и координаты вектора $\vec{x}=(4;-5;-6)\in\mathbb{L}$ в этом базисе.



◀ Очевидно, что множество $\mathbb{L}$ замкнуто относительно операции сложения двух произвольных векторов $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}\in\mathbb{L}$ и умножения на скаляр α. Следовательно, множество $\mathbb{L}$ линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^3$. Это двумерное линейное пространство, т.к. каждой точке $P(a;b)\in\mathbb{R}^2$ соответствует один вектор пространства $\mathbb{L}$.

В качестве базиса выберем два вектора, соответствующие двум произвольным, но различным, точкам двумерной плоскости: например: $P_1(1;0)$ и $P_2(0;1)$. Получаем, два линейно независимые вектора образующие один из базисов пространства $\mathbb{L}$.

$\{\overline{\mathbf{e}}_1=(2;\ 1;\ 4),\ (3;\ -2;\ -1)\}$.

Линейная независимость данных векторов следует из того, что ранг матрицы, состоящих из данных векторов $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, равен 2.

Ранг равен 2, т.к. имеется ненулевой определитель второго порядка. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0.$

Следовательно, система векторов $\mathbf{E}=\{\overline{\mathbf{e}}_1=(2;\ 1;\ 4),\ (3;\ -2;\ -1)\}$ образует базис линейного подпространства $\mathbb{L}$.

Причем, благодаря удачному выбору точек P,

Любой вектор из $\mathbb{L}$ можно разложить по полученному базису:

$$\vec{x}=(2a+3b;\ a-2b;\ 4a-b)=a\overline{\mathbf{e}}_1+b\overline{\mathbf{e}}_2.$$

2. Найти базис линейного подпространства $\mathbb{L}=\{\vec{x} \mid \vec{x}=(2a+3b;\ a-2b;\ 4a-b), a,b\in\mathbb{R}\}$ и координаты вектора $\vec{x}=(4;-5;-6)\in\mathbb{L}$ в этом базисе.

Найдём координаты заданного вектора $\vec{x}=(4;-5;-6)$ в базисе $\mathbf{E}=\{\bar{\mathbf{e}}_1,\bar{\mathbf{e}}_2\}$.
$(4;-5;-6)=a\bar{\mathbf{e}}_1+b\bar{\mathbf{e}}_2=(2a+3b;\ a-2b;\ 4a-b)$.

Задача свелась к решению системы трёх уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} 2a+3b=4, \\ a-2b=-5, \\ 4a-b=-6. \end{cases}$$

Решаем её методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{c} -2\mathrm{II} \\ \sim \\ -2\mathrm{I} \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 7 & 14 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Получаем, система совместна и имеет единственное решение: $a=-1,\ b=2$.

Следовательно, координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\mathbf{E}$ равны $(-1;2)$. Это можно записать в виде: $\bar{\mathbf{x}}_E=(-1;2)$.

Ответ: $\boxed{\mathbf{E}=\{\bar{\mathbf{e}}_1=(2;1;4),(3;-2;-1)\}\text{– базис } \mathbb{L},\ \bar{\mathbf{x}}_E=(-1;\ 2).}$

3. Найти матрицу линейного оператора $\widehat{A}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в каноническом базисе и образ вектора $\vec{c} = (1; -3)$, если $\widehat{A}\,\vec{x} = (2x_1 + 5x_2; 5x_1 - 4x_2)$.

◀1) Получим матрицу линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в каноническом базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$:

$$\left\{\bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} = (1;\ 0), e_2 = \bar{\mathbf{j}} = (0;\ 1)\right\}.$$

Матрица линейного оператора состоит из столбцов образов базисных векторов.
Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\widehat{\mathbf{A}}$ к базисным векторам:
$\widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = \widehat{\mathbf{A}}(1;0) = (2;\ 5)$, $\widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = \widehat{\mathbf{A}}(0;1) = (5;\ -4)$.
Выпишем матрицу линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что её определитель не равен нулю. Следовательно, оператор обратим и его ядро состоит только из одного элемента $\mathrm{Ker}\,\widehat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$, а его образ совпадает с пространством $\mathbb{R}^2$, т.е. $\mathrm{Im}\,\widehat{\mathbf{A}} = \mathbb{R}^2$.

Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (1;\ -3)$. Это можно сделать двумя способами: по формуле $\bar{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}}$ или $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы-столбцы векторов $\bar{\mathbf{y}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, соответственно.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \widehat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}} = (2\cdot 1 + 5\cdot(-3); 5\cdot 1 - 4\cdot(-3)) = (-13;\ 17).$$ ▶

Ответ: $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix},\ \mathrm{Im}\,\bar{\mathbf{c}} = (-13; 17).}$

4. Найти собственные значения линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ и записать матрицу оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ в базисе из собственных векторов.

◀ Собственными значениями линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ являются числа λ для которых выполняются условия $\widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}}$, $x \neq 0$.

Для нахождения собственных значений необходимо найти корни характеристического уравнения $\det(\mathbf{A} - \lambda E) = 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 30 = 0,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 24 = 0.$$

Это уравнение имеет два вещественных корня: $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = 8$, которые и являются собственными значениями.

Матрица оператора в базисе состоящем из собственных векторов будет равна

$$A_{\mathbf{F}_\lambda} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 8,\ A_{\mathbf{F}_\lambda} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.}$

5. Для линейного оператора $\widehat{A}$ из задачи 4 найти собственные векторы. Выписать один из базисов, в котором матрица оператора будет диагональной.

Собственными векторами, соответствующими собственному числу λ линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ являются вектора $\overline{\mathbf{x}}$ для которых выполняются условия $\widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \lambda\overline{\mathbf{x}}$, $x \neq 0$. В матричном виде это кравнение можно записать $\boxed{(A-\lambda E)X = O}$

Сначала найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -3$. Для этого нужно решить систему линейных уравнений,

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 5 \\ 6 & 3-(-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг системы равен 1. Следовательно, полученная система совместна, но неопределённа.

Система эквивалентна уравнению $x_1 + x_2 = 0$. В качестве базисной переменной выбираем переменную x_1, а в качестве свободной — $x_2 = -c_1$, где $c_1 \in \mathbb{R}$ произвольное действительное число не равное нулю. Получаем решение системы: $x_1 = c_1, x_2 = -c_1, c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$.

Аналогично получаем систему уравнений, для собственного : $\{\overline{\mathbf{x}}_1 | \overline{\mathbf{x}}_1 = (c_1;\ -c_1), c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0)\}$

$$\begin{pmatrix} 2-8 & 5 \\ 6 & 3-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Ранг системы равен 1. Следовательно, полученная система совместна, но неопределённа.

Система эквивалентна уравнению $6x_1 - 5x_2 = 0$. В качестве базисной переменной выбираем переменную x_1, а в качестве свободной — $x_2 = 6c_2$, где $c_2 \in \mathbb{R}$ произвольное действительное число. Получаем решение системы $x_1 = 5c_1, x_2 = -c_1, c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$. Отсюда найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 8$, $\{\overline{\mathbf{x}}_2 | \overline{\mathbf{x}}_2 = (5c_2;\ 6c_2), c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0\}$.

В качестве базиса выберем по одному ненулевому вектору из множеств $\overline{\mathbf{x}}_1$ и $\overline{\mathbf{x}}_2$, берем, например, $c_1 = c_2 = 1$. Получаем базис из собственных векторов $\mathbf{F}_{F_\lambda} = \{\overline{\mathbf{f}}_{\lambda_1} = (1;\ -1),\ \overline{\mathbf{f}}_{\lambda_2} = (5;\ 6)\}$ в котором матрица оператора $\widehat{\mathbf{A}}$ равна $\mathbf{A}_{F_\lambda} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

5. Для линейного оператора $\widehat{\mathrm{A}}$ из задачи 4 найти собственные векторы. Выписать один из базисов, в котором матрица оператора будет диагональной.

$$\mathbf{A}_{F_\lambda} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{\overline{\mathbf{x}}_1 = \{(c_1;\ -c_1), c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0\}, \overline{\mathbf{x}}_2 = \{(5c_2;\ 6c_2), c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0).\}\ \{\overline{\mathbf{f}}_{\lambda_1} = (1;\ -1),\ \overline{\mathbf{f}}_{\lambda_1} = (5;\ 6).\}}$

6. Найти ядро линейного оператора $\widehat{\mathbf{A}}\ :\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$.

◄ Ядром линейного оператора является множесство векторов линейного пространства $\mathbb{V}$ которые оператор отображает в нулевой вектор. Т.е. $\mathrm{Ker}\,\widehat{\mathbf{A}} = \{\overline{\mathbf{x}} \,|\, \widehat{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{0}},\ \overline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}\}$.

Решаем ОСЛАУ (однородную систему линейных уравнений) $\mathbf{AX} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Или $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 0, \\ 4x_1 + 14x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{\ 2x_1 + 7x_2 = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2c, \\ x_1 = 7c, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Следовательно, ядро оператора состоит из всех векторов, вида $(2c;\ -3c), c \in \mathbb{R}$. ►

Ответ: $\boxed{\mathrm{Ker}\,\widehat{\mathbf{A}} = \{(7c;\ -2c), c \in \mathbb{R}\}}$.

7. Выписать матрицу квадратичной формы $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 6x_2x_3 - 5x_3^2$ и с помощью нее найти значение квадратичной формы $\varphi(\overrightarrow{x})$ на векторе $\overrightarrow{a} = (-1; 2; 1)$.

◄ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

Для вычисления значение квадратичной формы $\varphi(\overline{\mathbf{x}})$ с использованием матрицы формы A, применяем формулу $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = X^T A X$, где X— матрица столбец, соответствующая вектору $\overline{\mathbf{x}}$.

$$\varphi(\overline{\mathbf{a}}) = (-1\ 2\ 1)\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-6\ 14\ -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 33.$$

Для проверки полученного результата применим второй способ решения задачи. Подставим значения вектора $\overline{\mathbf{a}}$ в формулу квадратичной формы.

$\varphi(\overline{\mathbf{a}}) = 2\cdot(-1)^2 - 6(-1)\cdot 2 + 4(-1)\cdot 1 + 4\cdot 2^2 + 6\cdot 2 - 5 = 33.$ ►

Ответ: $\boxed{\varphi(\overline{\mathbf{a}}) = 33.}$

8. Для системы векторов $\{\overline{\mathbf{e}}_1 = (-1;5), \overline{\mathbf{x}}_2 = (4;-1)\}$, заданных в ортонормированном базисе, вычислить определитель Грама.

◀ Для вычисления матрицы Грама применяется формула

$$G = \begin{pmatrix} (\overline{\mathbf{e}}_1,\ \overline{\mathbf{e}}_1) & (\overline{\mathbf{e}}_1,\ \overline{\mathbf{e}}_2) \\ (\overline{\mathbf{e}}1,\ \overline{\mathbf{e}}_2) & (\overline{\mathbf{e}}_2,\ \overline{\mathbf{e}}_2) \end{pmatrix},$$

где $(\overline{\mathbf{e}}_i, \overline{\mathbf{e}}_j)$ — скалярное произведение. Т.к. вектора $\overline{\mathbf{e}}_1$ и $\overline{\mathbf{e}}_2$ заданы в ортонормированном базисе, следовательно, для скалярного произведения верна формула: $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$. Для нашего задания имеем:

$(\overline{\mathbf{e}}_1,\ \overline{\mathbf{e}}_1) = (-1)^2 + 5^2 = 26$; $(\overline{\mathbf{e}}_1,\ \overline{\mathbf{e}}_2) = -1 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = -9$; $(\overline{\mathbf{e}}_2,\ \overline{\mathbf{e}}_2) = 4^2 + (-1)^2 = 17$.

Получили матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} 26 & -9 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\boxed{G = \begin{pmatrix} 26 & -9 \\ -9 & 17 \end{pmatrix}.}$

9. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\overline{\mathbf{x}}) = 2x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2^2 - 4x_2x_3 + 14x_3^2$ на знакоопределенность (положительно определенная, отрицательно определенная или общего вида).

Выпишем матрицу заданной квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 14 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся критерием Сильвестра. Вычислим угловые миноры матрицы A

$$\det A_1 = \det(2) = 2 > 0,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Следовательно, квадратичная форма, заданная матрицей A является положительно определённой.

Ответ: **Квадратичная форма положительно определённая.**

Примерный вариант №2

1. В линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы системы векторов **A** = {(-1; 2; 1), (-2; -1; 7), (-1; -8; 11)} и **B**={(2; 1; -4), (2; 1; -1), (1; 2; 0)}. Определить, какая из систем является линейно независимой в $\mathbb{R}^3$.
%*Ответ: **B** $det\ A = 0,\ det\ B = -9$.
2. Найти базис линейного подпространства $\mathbb{L}=\{\overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} = (a+3b;\ -3a+2b;;\ 2a+b), a, b \in \mathbb{R}\}$ и координаты вектора $\overrightarrow{x} = (7;1;4) \in \mathbb{L}$ в этом базисе.
%*Ответ: $\overrightarrow{x} = (1;2)$.
3. Найти матрицу линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в каноническом базисе и образ вектора $\overrightarrow{c} = (2;4)$, если $\widehat{\Lambda}\overrightarrow{x} = (2x_1 - 5x_2; 2x_1 + 3x_2)$.
%*Ответ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\quad c = (-16;\ 16)$
4. Найти собственные значения линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$ и записать матрицу оператора $\widehat{\Lambda}$ в базисе из собственных векторов.
%*Ответ: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
5. Для линейного оператора $\widehat{\Lambda}$ из задачи 4 найти собственные векторы. Выписать один из базисов, в котором матрица оператора будет диагональной.
%*Ответ: $\{\overrightarrow{x}_1 = (c_1; c_1),\ \ \overrightarrow{x}_2 = (c_2, 5c_2),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \qquad E : \{(1;1),\ (1;5)\}$.
6. Найти ядро линейного оператора $\widehat{\Lambda}\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 20 & -35 \end{pmatrix}.$$

Ответ: {(7c; 4c), c $\in \mathbb{R}$}

7. Выписать квадратичную форму $\varphi(\overrightarrow{x})$ по ее матрице $\Lambda = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ и найти значение $\varphi(\overrightarrow{x})$ на векторе $\overrightarrow{a} = (5;2;-2)$.
Ответ: -24
8. Матрица Грама в базисе $\{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$. Найти угол между базисными векторами.
Ответ: $5\pi/6$
9. Исследовать квадратичную форму $\varphi(\overrightarrow{x}) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2^2 + 8x_2x_3 - 15x_3^2$ на знакоопределенность (положительно определенная, отрицательно определенная или общего вида).
Ответ: "d1= -2,"d2= 7,"d3= -13 отрицательно определенная

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Линейная алгебра и АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

15 июня 2023г