

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 3

Линейные подпространства в линейном пространстве.
Определение линейного подпространства. Дополнение базиса
подпространства до базиса всего пространства.

Берков Николай Андреевич
25 февраля 2023г

Определение 1.1. (*Аксиоматика линейного пространства*).

Непустое множество V элементов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ любой природы, называемых векторами, называется *линейным, или векторным пространством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. В V определены две операции: *сложение векторов* $\bar{x} + \bar{y}$ и *умножение вектора* $\bar{x}$ на скаляр α – так, что множество V *замкнуто* относительно этих операций:

1) $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V: \bar{x} + \bar{y} \in V;$

2) для любого числа α и любого элемента $\bar{x} \in V$ определён элемент $\alpha\bar{x} \in V$ (произведение элемента $\bar{x}$ на число α).

2. Причём эти операции обладают следующими свойствами:

1) $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ (*коммутативность сложения*);

2) $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$ (*ассоциативность сложения*);

3) в V существует нулевой элемент (нуль) $\bar{0} \in V$, такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x} \forall \bar{x} \in V$ (*существование нуля*);

4) для каждого элемента $\bar{x} \in V \exists$ элемент $(-\bar{x}) \in V$, называемый *противоположным* элементу $\bar{x}$, такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;

5) $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ (умножение на 1 не изменяет элемент);

6) $\lambda(\mu\bar{x}) = (\lambda\mu)\bar{x}$ (умножение на число ассоциативно);

7) $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$ (дистрибутивность относительно суммы элементов);

8) $(\lambda + \mu)\bar{x} = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$ (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей).



Линейные подпространства

Определение 3.1. *Непустое подмножество M линейного пространства V называется **линейным подпространством** пространства V , если выполняются два условия:*

- 1) *если $\bar{x}, \bar{y} \in M$, то $\bar{x} + \bar{y} \in M$ (замкнутость подпространства относительно операции сложения);*
- 2) *если $\bar{x} \in M$, а α число, то $\alpha\bar{x} \in M$ (замкнутость подпространства относительно операции умножения на скаляр).*

Докажем, что определённое таким образом подмножество M , является линейным пространством.

Замкнутость относительно операций сложения и умножения, следует из данного определения.

Поэтому достаточно проверить выполнимость гипотез 1-8 из определения линейного пространства 1.1.

Возьмём любой элемент $\bar{x}$ множества M и любое число $\alpha \in \mathbb{R}$. Из определения подпространства, следует, что $\bar{y} = \alpha\bar{x} \in M$.

При $\alpha = 0$ элемент $\bar{y} = \bar{0}$, а при $\alpha = -1$ $\bar{y} = (-\bar{x})$.

Следовательно, в данном множестве присутствует нулевой элемент, и для произвольного элемента $\bar{x} \in M \exists$ противоположный ему $(-\bar{x})$.

Справедливость других гипотез следует из того, что все элементы множества M являются одновременно и элементами линейного пространства V .



Линейные подпространства

Замечание 3.1. Подчеркнём ещё раз, что нулевой вектор $\bar{0}$ содержится в любом подпространстве M пространства V и для любого вектора $\bar{x} \in M \exists (-\bar{x}) \in M$.

Примеры линейных подпространств

1. Пусть V — произвольное векторное пространство. Тогда всё подпространство V и множество, состоящее только из нулевого элемента $\bar{0}$ пространства V являются подпространствами пространства V .

2. Пусть V — трёхмерное геометрическое пространство V_3 . Множество векторов M , коллинеарных некоторой плоскости π этого пространства, является подпространством линейного пространства V .

◀Как известно из курса геометрии, если векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ коллинеарны некоторой плоскости π , то и вектор $\bar{x} + \bar{y} \in \pi$ также коллинеарен этой плоскости. Следовательно, множество M замкнуто относительно операции сложения.

Если вектор $\bar{x}$ коллинеарен плоскости π , то и вектор $\alpha\bar{x}$ также коллинеарен плоскости π . Доказали замкнутость множество M относительно операции умножения на скаляр.▶



Линейная оболочка системы векторов

3. Пусть $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$ — совокупность элементов некоторого линейного пространства $\mathbb{V}$. Обозначим через $\mathbf{M}$ множество всевозможных линейных комбинаций этой совокупности векторов.

Возьмём два вектора

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n \text{ и } \bar{\mathbf{y}} = \beta_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \beta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \beta_n \bar{\mathbf{a}}_n.$$

$$\bar{\mathbf{x}} \text{ и } \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M}, \alpha_i \text{ и } \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

1) Докажем, что $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M}$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} &= \alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n + \beta_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \beta_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \beta_n \bar{\mathbf{a}}_n = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \bar{\mathbf{a}}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \bar{\mathbf{a}}_n = \gamma_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \gamma_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \gamma_n \bar{\mathbf{a}}_n, \end{aligned}$$

где $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i \in \mathbb{R}$.

2) Докажем, что $\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \delta \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{M}$.

$$\delta \bar{\mathbf{x}} = \delta \alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \delta \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \delta \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n, \in \mathbf{M}.$$

Доказали, что $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{M}$ и $\forall \delta \in \mathbb{R} \quad \delta \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{M}$, т.е. $\mathbf{M}$ — подпространство линейного пространства $\mathbb{V}$. Полученное подпространство $\mathbf{M}$ называется линейной оболочкой пространства $\mathbb{V}$.



Линейная оболочка системы векторов

Определение 3.2. Линейной оболочкой элементов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n \in \mathbb{V}$ называется совокупность всех линейных комбинаций этих элементов, т.е. множество элементов $\bar{\mathbf{x}}$

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_1 \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\mathbf{a}}_n, \quad (3.1)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — произвольные скаляры.

Оболочку, порождённую системой элементов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n \in \mathbb{V}$ будем обозначать $\mathbb{L}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n)$.

Очевидно, что если $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$ — система векторов порождающих пространство $\mathbb{V}$, то $\mathbb{L}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n) = \mathbb{V}$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Любое подпространство конечномерного векторного пространства является подпространством, порождённым некоторым набором векторов (например, своим базисом).*

Линейная оболочка элементов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$ является наименьшим подпространством, содержащим элементы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n$.



Линейная оболочка системы векторов

Наглядным примером линейной оболочки служит линейная оболочка базисных векторов $\mathbb{L}(1, t, t^2, \dots, t^n)$. Она совпадает с линейным пространством многочленов степени, не превышающей n , т.е. с множеством векторов $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. В свою очередь эта оболочка является подпространством пространства непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

Размерность линейной оболочки $\mathbb{L}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n)$ равна рангу системы векторов которыми она порождена, и равна рангу матрицы столбцами или строками которой являются данные вектора.

Теорема 3.2. (О размерности линейной оболочки.)

Размерность линейной оболочки $\mathbb{L}(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n)$ равна максимальному числу линейно независимых векторов среди порождающих.

В частности, если они все линейно независимы, то размерность линейной оболочки равна их числу, а сами они образуют базис этой оболочки.



Сумма и пересечение подпространств

Теорема 3.3. Если M_1 и M_2 — подпространства линейного пространства V , то множества $S = M_1 + M_2$ и $P = M_1 \cap M_2$ являются подпространствами пространства V .

◀Выше доказано, что каждое из подпространств M_1 и M_2 содержит нулевой вектор.

Поэтому, $\bar{0} \in M_1 + M_2$ и $\bar{0} \in M_1 \cap M_2$.

Следовательно, сумма и пересечение подпространств всегда непустые множества.

Докажем замкнутость множеств $S = M_1 + M_2$ и $P = M_1 \cap M_2$.

Пусть $\bar{x}_1, \bar{y}_1 \in M_1$, $\bar{x}_2, \bar{y}_2 \in M_2$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Тогда $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in S$ и $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \in S$.

$$\bar{x} + \bar{y} = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \in M_1 + M_2.$$

$$\alpha \bar{x} = \alpha(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \alpha \bar{x}_1 + \alpha \bar{x}_2 \in M_1 + M_2.$$

Следовательно, $S = M_1 + M_2$ — подпространство в пространстве V .

Аналогично доказывается, что $M_1 \cap M_2$ — подпространство пространства V .

Пусть $\bar{x}, \bar{y} \in P$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $\bar{x}, \bar{y} \in M_1$ и $\bar{x}, \bar{y} \in M_2$ одновременно. M_1 и M_2 подпространства, поэтому $\bar{x} + \bar{y} \in M_1$, $\bar{x} + \bar{y} \in M_2$, $\alpha \bar{x} \in M_1$ и $\alpha \bar{x} \in M_2$.

Отсюда следует, что $\bar{x} + \bar{y} \in P$ и $\alpha \bar{x} \in P$.

Следовательно, $P = M_1 \cap M_2$ — подпространство в пространстве V .▶



Сумма и пересечение подпространств

Теорема 3.4. Размерность суммы произвольных подпространств M_1 и M_2 конечномерного линейного пространства V равна сумме размерностей этих подпространств минус размерности их пересечения. $\dim(M_1 + M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(M_1 \cap M_2)$. (3.2)

Формулу (3.2) часто используют для вычисления размерности пересечения подпространств

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) - \dim(M_1 + M_2). \quad (3.3)$$

Определение 3.5. Линейное пространство V представляет собой **прямую сумму** своих подпространств M_1 и M_2 , если каждый вектор $\bar{x}$ пространства V может быть единственным образом представлен в виде суммы $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 \in M_1$, $\bar{x}_2 \in M_2$.

Прямая сумма подпространств M_1 и M_2 обозначается символом $\oplus$, т.е. $M_1 \oplus M_2$.

Теорема 3.5. Для того, чтобы n -мерное линейное пространство V представляло собой прямую сумму своих подпространств M_1 и M_2 , необходимо и достаточно, чтобы $M_1 \cap M_2 = \{\bar{0}\}$ и $\dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(V)$.

Замечание 3.3. $V = M_1 \oplus M_2$ тогда и только тогда, когда

$$\dim(M_1 + M_2) = \dim(M_1) + \dim(M_2) = \dim(V).$$



Теорема 3.6. Пусть $\mathbb{H}$ — k -мерное подпространство в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$. Если $\mathfrak{B}_H = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k\}$ — базис в $\mathbb{H}$, дополнить до базиса $\mathbb{V}$ $\mathfrak{B}_V = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k, \bar{\mathbf{e}}_{k+1}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$, то в базисе $\mathfrak{B}_V$ все векторы $\bar{\mathbf{x}}$ из подпространства $\mathbb{H}$, и только они, будут иметь координаты $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$.

◀ Пусть $\mathbb{H}$ — подпространство в $\mathbb{V}$. Рассмотрим $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{H}$; $\dim \mathbb{H} = k$; $\dim \mathbb{V} = n$.

1. Дополним базис $\mathfrak{B}_H = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k\}$ до базиса $\mathfrak{B}_V = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k, \bar{\mathbf{e}}_{k+1}, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$.

Тогда $\bar{\mathbf{x}} = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_k\bar{\mathbf{e}}_k = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_k\bar{\mathbf{e}}_k + 0\bar{\mathbf{e}}_{k+1} + \dots + 0\bar{\mathbf{e}}_n = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0)$.

2. Если $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ и $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots, 0) = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_k\bar{\mathbf{e}}_k + 0\bar{\mathbf{e}}_{k+1} + \dots + 0\bar{\mathbf{e}}_n = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_k\bar{\mathbf{e}}_k \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{H}$, так как разложим по базису в $\mathfrak{B}_H$. ▶



Пример 3.1. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки образованной системой арифметических векторов:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (0, -1, 2, -1)$. Показать, что вектор $\bar{\mathbf{d}} = (2, 5, -6, 5)$ содержится в этой оболочке.

◀ Докажем, что вектора $\bar{\mathbf{a}}_1$ и $\bar{\mathbf{a}}_2$ линейно независимы. Рассмотрим их линейную комбинацию:

$$a\bar{\mathbf{a}}_1 + b\bar{\mathbf{a}}_2 = a(1, 0, 2, 0) + b(0, -1, 2, -1) = (a, -b, 2a + 2b, -b).$$

Очевидно, что она равна нулевому вектору, только когда её коэффициенты $a = b = 0$. Следовательно, векторы $\bar{\mathbf{a}}_1$ и $\bar{\mathbf{a}}_2$ линейно независимы и их можно выбрать в качестве базисных векторов линейной оболочки

$$\mathbf{L} = \{a\bar{\mathbf{a}}_1 + b\bar{\mathbf{a}}_2 \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

По теореме 3.1 полученная оболочка является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^4$ с базисом $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2\}$.

$$\dim \mathbf{L} = 2.$$



Продолжение примера 3.1

Пример 3.1. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки образованной системой арифметических векторов:

$\bar{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (0, -1, 2, -1)$. Показать, что вектор $\bar{\mathbf{d}} = (2, 5, -6, 5)$ содержится в этой оболочке.

Найдём координаты (x_1, x_2) вектора $\bar{\mathbf{d}} = (2, 5, -6, 5)$ в базисе $\mathfrak{B}$ двумерного линейного подпространства $\mathbf{L}$. Для этого решаем систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1(1, 0, 2, 0) + x_2(0, -1, 2, -1) &= (2, 5, -6, 5) \Rightarrow \\ (x_1, -x_2, 2x_1 + 2x_2, -x_2) &= (2, 5, -6, 5). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты векторов, получаем систему четырёх уравнений с двумя неизвестными:

$$x_1 = 2, \quad -x_2 = 5, \quad 2x_1 + 2x_2 = -6, \quad -x_2 = 5,$$

которая имеет единственное решение

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -5. \quad \blacktriangleright$$

Ответ: $\dim \mathbf{L} = 2$, $\mathfrak{B} = \{(1, 0, 2, 0), (0, -1, 2, -1)\}$, $\bar{\mathbf{d}} = 2\bar{\mathbf{a}}_1 - 5\bar{\mathbf{a}}_2$.



Пример 3.2. Показать, что линейная оболочка системы многочленов $\mathbf{P} = \{3t^2 - 1, t^2 + 1, -t \mid t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с пространством $\mathbb{P}_2$ всех многочленов степени не выше 2.

◀ Покажем, что система векторов $\bar{\mathbf{a}}_1 = 3t^2 - 1, \bar{\mathbf{a}}_2 = t^2 + 1, \bar{\mathbf{a}}_3 = -t$, заданная в базисе линейного пространства $\mathbb{P}_2$ с базисом $\mathfrak{B}_{\mathbb{P}_2} = \{1, t, t^2\}$, линейно независима.

Докажем, что матрица A , задающая множество векторов $\mathbf{P}$, невырождена.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим её определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Следовательно, система трёх векторов $\bar{\mathbf{a}}_1 = 3t^2 - 1, \bar{\mathbf{a}}_2 = t^2 + 1, \bar{\mathbf{a}}_3 = -t$ образует базис в пространстве $\mathbb{P}_2$, а линейная оболочка системы многочленов $\mathbf{P} = \{3t^2 - 1, t^2 + 1, -t \mid t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с пространством $\mathbb{P}_2$.

Заметим, что матрица A является матрицей перехода от канонического базиса $\mathfrak{B}_{\mathbb{P}_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$ к новому базису построенному на векторах $\bar{\mathbf{a}}_1 = 3t^2 - 1, \bar{\mathbf{a}}_2 = t^2 + 1, \bar{\mathbf{a}}_3 = -t$. ▶



Пример 3.3. Является ли множество точек в трёхмерном действительном пространстве $\mathbf{L} = \{(b, a + 2b, b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$ с каноническим базисом $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$? Если да, то построить базис $\mathfrak{B}_L = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ подпространства $\mathbf{L}$. Найти координаты точки $M(3, 8, 1)$ в полученном базисе подпространства $\mathbf{L}$. Дополнить полученный базис подпространства до базиса $\mathfrak{B}_E\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ всего пространства $\mathbb{R}^3$. Найти матрицу перехода $\mathbf{P}_{I \rightarrow E}$.

► Заданное множество является подмножеством векторов в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Согласно определению линейного подпространства 3.1, данное множество $\mathbf{L}$ будет линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^3$, если оно замкнуто относительно операции сложения и умножения на число.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = (b_x, a_x + 2b_x, b_x - a_x)$ и $\bar{y} = (b_y, a_y + 2b_y, b_y - a_y) \in \mathbf{L}$, где $a_x, a_y, b_x, b_y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{x} + \bar{y} &= (b_x, a_x + 2b_x, b_x - a_x) + (b_y, a_y + 2b_y, b_y - a_y) = \\ &= ((b_x + b_y), (a_x + a_y) + 2(b_x + b_y), (b_x + b_y) - (a_x + a_y)) = \\ &= (b_1, a_1 + 2b_1, b_1 - a_1), \end{aligned}$$

где $a_1 = a_x + a_y$, $b_1 = b_x + b_y \in \mathbb{R}$.

Следовательно, вектор $\bar{x} + \bar{y}$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции сложения векторов.



$$2) \alpha \bar{x} = \alpha(b_x, a_x + 2b_x, b_x - a_x) = (\alpha b_x, \alpha a_x + 2\alpha b_x, \alpha b_x - \alpha a_x) = (b_2, a_2 + 2b_2, b_2 - a_2), \text{ где } a_2 = \alpha a_x, b_2 = \alpha b_x \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, вектор $\alpha \bar{x}$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции умножения вектора на число.

Тем самым, доказано, что заданное множество векторов $\mathbf{L}$ является линейным подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Согласно теореме 3.1, линейная оболочка векторов $\{(b, a + 2b, b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ является искомым подпространством $\mathbf{L}$.

Построим базис этого подпространства.

Для этого произвольным действительным переменным a и b , определяющим совокупность вектором рассматриваемой двумерной оболочки, придадим значения $\{(\underline{a = 1, b = 0}), (\underline{a = 0, b = 1})\}$.

В результате получаем линейно независимых вектора:

$$\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1).$$



$$\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1). \quad \mathbf{L} = \left\{ \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Их независимость следует из того, что любая их линейная комбинация $\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 = (\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2)$ равна нулевому вектору $(0, 0, 0)$, только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

В полученном базисе общий элемент оболочки $\mathbf{L}$ можно записать в виде линейной комбинации
 $\mathbf{L} = (b, a + 2b, b - a) = a(0, 1, -1) + b(1, 2, 1), a, b \in \mathbb{R}.$

Следовательно, мы построили базис $\mathfrak{B}$ подпространства $\mathbf{L}$ с *базисными векторами*

$$\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1).$$

Заданное множество можно представить в линейной оболочке базисных векторов $\mathbf{L} = \left\{ \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}.$

$$\dim(\mathbf{L}) = 2.$$



Найдём теперь координаты точки $M(3, 8, 1) \in \mathbf{L}$ в базисе подпространства $\mathbf{L}$.

$$M = (3, 8, 1) = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 \Rightarrow (3, 8, 1) = x_1(0, 1, -1) + x_2(1, 2, 1) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ -x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3.$$
$$M = (3, 8, 1) = 2\bar{\mathbf{e}}_1 + 3\bar{\mathbf{e}}_2.$$

Дополним базис двумерного подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^3$.

Для этого надо найти любой вектор $\bar{\mathbf{e}}_3 = (x, y, z)$, который не компланарен плоскости оболочки $\mathbf{L}$, при этом вектора $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ должны быть линейно независимыми.

$$\alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{0}}, \text{ только когда } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$



Тогда однородная система линейных уравнений имеет единственное решение. Это будет выполнено, если определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix}$ не равен нулю. Значения x, y и z легко подобрать. Таких значений бесконечное множество, мы возьмём наиболее простую комбинацию значений x, y и z , например, $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$. В результате $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Получили базис пространства $\mathbb{R}^3$, который содержит базисные вектора подпространства $\mathbf{L}$:
 $\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Согласно определению 3.5 двумерное линейное подпространство $\mathbf{L}$ и одномерное пространство являющееся линейной оболочкой третьего базисного $L(\bar{e}_3)$ представляют прямую сумму пространства $\mathbb{R}^3$.



Получили базис пространства $\mathbb{R}^3$:
 $\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Представим полученную зависимость в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{pmatrix}$$

где матрица

$$P_{\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

является матрицей перехода от старого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ пространства $\mathbb{R}$ к новому базису этого же пространства $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.



В случае когда координаты базисных векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ получены в прямоугольном ортонормированном декартовом базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, третий базисный вектор выбирают таким образом, чтобы он был ортогонален плоскости содержащих базисные вектора $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$.

Тогда в качестве вектора $\bar{e}_3$ можно взять вектор равный или коллинеарный векторному произведению базисных векторов подпространства L .

$$\bar{e}_3 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = ((1 + 2), -(0 + 1), (0 - 1)) = (3, -1, -1)$$

Получили базисные вектора пространства $\mathbb{R}^3$
 $\{\bar{e}_1 = (0, 1, -1), \bar{e}_2 = (1, 2, 1), \bar{e}_3 = (3, -1, -1)\}$. ◀

В этом случае, матрица перехода P_1 от старого базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ к новому базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, равна

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$



Пример 3.4. Является ли множество векторов $\mathbf{L} = \{(2 + b, a - 2b, b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$?

◀ Заданное множество является подмножеством векторов в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Особенностью данного множества является то, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, сумма координат этих векторов равна 2. Согласно определению 3.1, данное множество $\mathbf{L}$ будет линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^3$, если оно замкнуто относительно операции сложения и умножения на число.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{x}} = (2 + b_x, a_x - 2b_x, b_x - a_x)$ и $\bar{\mathbf{y}} = (2 + b_y, a_y - 2b_y, b_y - a_y) \in \mathbf{L}$, где $a_x, a_y, b_x, b_y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1) \bar{\mathbf{c}} &= \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} = (2 + b_x, a_x - 2b_x, b_x - a_x) + (2 + b_y, a_y - 2b_y, b_y - a_y) = \\ &= ((4 + b_x + b_y), (a_x + a_y) - 2(b_x + b_y), (b_x + b_y) - (a_x + a_y)) = \\ &= (4 + b_1, a_1 - 2b_1, b_1 - a_1), \text{ где } a_1 = a_x + a_y, b_1 = b_x + b_y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Сумма координат вектора $\bar{\mathbf{c}}$ равна $4 + b_1 + a_1 - 2b_1 + b_1 - a_1 = 4 \neq 2$. Следовательно, вектор $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}$ не принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ не является замкнутым относительно операции сложения векторов.

$$\begin{aligned} 2) \alpha \bar{\mathbf{x}} &= \alpha(2 + b_x, a_x - 2b_x, b_x - a_x) = (2\alpha + \alpha b_x, \alpha a_x - 2\alpha b_x, \alpha b_x - \alpha a_x) = \\ &= (2\alpha + b_2, a_2 - 2b_2, b_2 - a_2), \text{ где } a_2 = \alpha a_x, b_2 = \alpha b_x \in \mathbb{R}. \\ 2\alpha + b_2 + a_2 - 2b_2 + b_2 - a_2 &= 2\alpha \neq 2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Следовательно, вектор $\alpha \bar{\mathbf{x}}$ не принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ не является замкнутым относительно операции умножения вектора на число.



Пример 3.4. Является ли множество векторов $L = \{(2 + b, a - 2b, b - a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$?

Решим задачу вторым, более простым способом.

Докажем, что в данном множестве не существует нулевого элемента. Для этого приравняем все координаты к нулю и решим полученную систему.

$$\begin{cases} 2 + b = 0, \\ a - 2b = 0, \\ b - a = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2, \\ a = 2b = -4, \\ a = b. \end{cases}$$

Система несовместна. Следовательно, в данном множестве нет нулевого элемента и поэтому оно не может быть линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^3$. ►



Пример 3.5. Доказать, что множество многочленов

$\mathbf{L} = \{P(t) = at^2 + 2bt - a + b \mid a, b, t \in \mathbb{R}\}$, заданных в базисе

$\mathfrak{B}_{P_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$, образует линейное подпространство в линейном пространстве многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис $\mathfrak{B}_L = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ подпространства $\mathbf{L}$. Дополнить базис подпространства $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$ до базиса $\mathfrak{B}_E\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ всего пространства $\mathbb{P}_2$. Найти координаты многочлена $h(t) = 2t^2 - 2t - 3 \in \mathbf{L}$ в базисе $\mathfrak{B}_L$ подпространства $\mathbf{L}$. Найти матрицу перехода $\mathbf{P}_{P_2 \rightarrow E}$.

◀ Заданное множество является подмножеством линейного пространства $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2. Согласно определению 3.1, данное множество $\mathbf{L}$ будет линейным подпространством пространства $\mathbb{P}_2$, если оно замкнуто относительно операции сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q(t) = a_1 t^2 + 2b_1 t - a_1 + b_1$ и $R(t) = a_2 t^2 + 2b_2 t - a_2 + b_2 \in \mathbf{L}$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Проверяем замкнутость заданного множества $\mathbf{L}$.

1) $Q(t) + R(t) = (a_1 + a_2)t^2 + 2(b_1 + b_2)t - (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = a_3 t^2 + 2b_3 t - a_3 + b_3$, где $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, элемент $Q(t) + R(t)$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции сложения многочленов.

2) $\alpha Q(t) = \alpha(a_1 t^2 + 2b_1 t - a_1 + b_1) = \alpha a_1 t^2 + 2b_1 \alpha t - a_1 \alpha + b_1 \alpha = a_4 t^2 + 2b_4 t - a_4 + b_4$, где $a_4 = \alpha a_1$, $b_4 = \alpha b_1 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, вектор $\alpha Q(t)$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции умножения многочлена на число.



Тем самым, доказано, что заданное множество многочленов $\mathbf{L}$ является линейным подпространством линейного пространства $\mathbb{P}_2$.

Согласно теореме 3.1, линейная оболочка векторов $\{at^2 + 2bt - a + b \mid a, b, t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с подпространством $\mathbf{L}$. Построим базис этого подпространства.

Для этого произвольным действительным переменным a и b определяющим совокупность вектором оболочки, придадим значения $\{(a = 1, b = 0), (a = 0, b = 1)\}$. В результате получаем **базисные вектора**

$$\bar{e}_1 = t^2 - 1, \bar{e}_2 = 2t + 1.$$

В полученном базисе общий элемент оболочки $\mathbf{L}$ можно записать в виде линейной комбинации

$$P(t) = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 = a(t^2 - 1) + b(2t + 1) = at^2 + 2bt - a + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Размерность линейного подпространства совпадает с количеством базисных векторов, образующих подпространство.

Следовательно, $\dim(\mathbf{L}) = 2$.

Дополним базис двумерного подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{P}_2$.



$$\mathfrak{B}_L = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = t^2 - 1, \bar{\mathbf{e}}_2 = 2t + 1\}.$$

Для этого надо найти любой вектор $\bar{\mathbf{e}}_3 = (x, y, z)$ такой, что базисные вектора $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ будут линейно независимыми.

Т.е. $\alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$, только когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Это будет выполнено, если определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}$ не равен нулю.

Значения x, y и z легко подобрать.

Для заданного примере возьмём $\bar{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)$.

$$\text{В результате } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Получили базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ пространства $\mathbb{P}_2$:

$$\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = (-1, 0, 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (1, 2, 0), \bar{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Полученные базисные вектора можно записать в виде трёх независимых полиномов:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = t^2 - 1, \bar{\mathbf{e}}_2 = 2t + 1, \bar{\mathbf{e}}_3 = 1.$$

Выпишем матрицу перехода от старого базиса $\{1, t, t^2\}$ к новому — $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$.

$$\mathbf{P}_{P_2 \rightarrow E} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Осталось найти координаты многочлена $h(t) = 2t^2 - 2t - 3$ в базисе подпространства $\mathbf{L}$. Данная задача разрешима, если многочлен $h(t)$ принадлежит подпространству $\mathbf{L} = \{P(t) = at^2 + 2bt - a + b \mid a, b, t \in \mathbb{R}\}$.

Легко подобрать значения параметров a и b при котором получается заданный полином $h(t) = 2t^2 - 2t - 3$.

Для данного примера, $a = 2, b = -1$. Подставляем эти значения:
 $P(t) = t^2 - 2t - 1 - 2 = 2t^2 - 2t - 3 \Rightarrow h(t) \in \mathbf{L}$.

Раскладываем полином $h(t) = 2t^2 - 2t - 3$ по базису подпространства $\mathbf{L}$: $\bar{e}_1 = t^2 - 1, \bar{e}_2 = 2t + 1$.

$$h(t) = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2.$$

$$\begin{aligned} h(t) &= 2t^2 - 2t - 3 = \alpha_1(t^2 - 1) + \alpha_2(2t + 1). \Rightarrow \\ 2t^2 - 2t - 3 &= \alpha_1 t^2 + 2\alpha_2 t + (\alpha_2 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Получаем $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -1$.

Т.е. $h(t) = 2t^2 - 2t - 3 = 2(t^2 - 1) - (2t + 1)$. ◀



Пример 3.6. Доказать, что множество матриц второго порядка $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b & a + 2b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка M_2 . Построить базис $\mathfrak{B}_A = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ подпространства A_2 . Дополнить полученный базис подпространства до базиса $\mathfrak{B}_{A_2} = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4\}$ всего пространства M_2 и найти матрицу перехода от канонического базиса пространства M_2 к полученному базису $\mathfrak{B}_{A_2}$. Найти разложения матрицы $D = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathfrak{B}_{A_2}$.

◀ Заданное множество A_2 является подмножеством линейного пространства M_2 квадратных матриц второго порядка. Согласно определению 3.1, данное множество A_2 будет линейным подпространством пространства M_2 , если оно замкнуто относительно операции сложения матриц и умножения матрицы на число.

$$\text{Пусть } \alpha \in \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 2a_1 - b_1 & a_1 + 2b_1 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, a_1, b_1 \in \mathbb{R} \text{ и} \\ B = \begin{pmatrix} 2a_2 - b_2 & a_2 + 2b_2 \\ 0 & 2a_2 \end{pmatrix}, a_2, b_2 \in \mathbb{R}. A, B \in A_2.$$



Проверяем замкнутость заданного множества A_2 .

$$\begin{aligned} 1) \quad A + B &= \begin{pmatrix} 2a_1 - b_1 & a_1 + 2b_1 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 - b_2 & a_2 + 2b_2 \\ 0 & 2a_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) + 2(b_1 + b_2) \\ 0 & 2(a_1 + a_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_3 - b_3 & a_3 + 2b_3 \\ 0 & 2a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $a_3 = a_1 + a_2$, $b_3 = b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$.

Элемент $A+B$ также принадлежит A_2 , следовательно и множество A_2 замкнуто относительно операции сложения многочленов.

$$\begin{aligned} 2) \quad \alpha \begin{pmatrix} 2a_1 - b_1 & a_1 + 2b_1 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2\alpha a_1 - \alpha b_1 & \alpha a_1 + 2\alpha b_1 \\ 0 & 2\alpha a_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2a_4 - b_4 & a_4 + 2b_4 \\ 0 & 2a_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $a_4 = \alpha a_1$, $b_4 = \alpha b_1 \in \mathbb{R}$. Следовательно, вектор αA также принадлежит A_2 и множество A_2 замкнуто относительно операции умножения многочлена на число.

Тем самым, доказано, что заданное множество матриц A_2 является линейным подпространством линейного пространства $\mathbb{M}_2$.



Согласно теореме 3.1, линейная оболочка векторов

$$\mathbf{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b & a + 2b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ совпадает с подпространством}$$

$\mathbf{A}_2$. Построим базис этого подпространства.

$$\mathfrak{B}_A : \left\{ \bar{\mathbf{f}}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{f}}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для доказательства независимости этой системы векторов, рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha_1 \bar{\mathbf{f}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{f}}_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Результат приравниваем к нулевой матрице. Получаем систему трёх линейных однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$



Следовательно, система векторов $\mathfrak{B}_A$ линейно независима.

Любую матрицу A из множества A_2 можно разложить по полученному базису $\mathfrak{B}_A = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2a - b & a + 2b \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\dim(A_2) = 2}.$$

Дополним базис двумерного подпространства A_2 до базиса всего пространства матриц второго порядка $\mathbb{M}_2$.

Для этого надо найти два таких вектора $\bar{\mathbf{f}}_3$ и $\bar{\mathbf{f}}_4$ из пространства $\mathbb{M}_2$ не входящих в множество A_2 , и чтобы система четырёх векторов $\{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3, \bar{\mathbf{f}}_4\}$ была линейно независима.

Т.е., $\alpha_1 \bar{\mathbf{f}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{f}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{f}}_3 + \alpha_4 \bar{\mathbf{f}}_4 = \bar{\mathbf{0}}$, только когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$.

В базисных векторах $\bar{\mathbf{f}}_1$ и $\bar{\mathbf{f}}_2$ значения элементов находящихся во второй строке и первом столбце равны нулю, поэтому в качестве третьего базового вектора выберем $\bar{\mathbf{f}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а четвёртого базового вектора $\bar{\mathbf{f}}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажем, что эта система векторов линейно независима.



$$\alpha_1 \bar{\mathbf{f}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{f}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{f}}_3 + \alpha_4 \bar{\mathbf{f}}_4 = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_4 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая к нулю все элементы этой матрицы, получаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Решение системы} \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0. \end{array}$$

Получили базис пространства $\mathbb{M}_2$, который содержит базисные вектора подпространства A_2 :

$$\mathfrak{B}_{A_2} : \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Согласно определению 19.5 двумерное линейное подпространство A_2 и двумерное пространство являющееся линейной оболочкой третьего и четвёртого базисных векторов $L(\bar{\mathbf{f}}_3, \bar{\mathbf{f}}_4)$ представляют прямую сумму пространства $\mathbb{M}_2$.

$$\underline{\dim(A_2)} = \underline{\dim(L(\bar{\mathbf{f}}_3, \bar{\mathbf{f}}_4))} = 2, \quad \underline{\dim(\mathbb{M}_2)} = 4.$$



Разложим полученные базисные вектора $\mathfrak{B}_{A_2} = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3, \bar{\mathbf{f}}_4\}$ в старом базисе $\mathfrak{B}_{M_2} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_4\}$:

$$\mathfrak{B}_{M_2} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Базис пространства матриц 2-го порядка}$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{f}}_1 = 2\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 + 2\bar{\mathbf{e}}_4, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 = -\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{f}}_3 = \bar{\mathbf{e}}_3, \\ \bar{\mathbf{f}}_4 = \bar{\mathbf{e}}_4. \end{cases}$$

Представим полученную зависимость в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1 \\ \bar{\mathbf{f}}_2 \\ \bar{\mathbf{f}}_3 \\ \bar{\mathbf{f}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \bar{\mathbf{e}}_3 \\ \bar{\mathbf{e}}_4 \end{pmatrix}$$

где матрица $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, является матрицей перехода от старого базиса $\mathfrak{B}_{M_2} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3, \bar{\mathbf{e}}_4\}$ пространства M_2 к новому базису этого же пространства $\mathfrak{B}_{A_2} = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3, \bar{\mathbf{f}}_4\}$. ◀



Осталось найти разложение матрицы $D = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathfrak{B}_A$.

Для этого надо из уравнения $D = x_1 \bar{\mathbf{f}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{f}}_2$ найти координаты x_1 и x_2 . Подставляя в это уравнение координаты базисных векторов $\bar{\mathbf{f}}_1$ и $\bar{\mathbf{f}}_2$, получаем

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & x_1 + 2x_2 \\ 0 & 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решая систему трёх уравнений с двумя неизвестными:

$2x_1 - x_2 = 8$, $x_1 + 2x_2 = -8$, $2x_1 = 4$, получаем

$x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

Мы доказали, что матрица $D \in \mathbf{A}_2$ и нашли её разложение в базисе $\mathfrak{B}_A$.

$$D = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2\bar{\mathbf{f}}_1 - 5\bar{\mathbf{f}}_2 = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$



Пример 3.7. Найти размерность подпространства и какой-нибудь базис линейной оболочки образованной системой пяти арифметических векторов линейного пространства $\mathbb{R}^4$: $\bar{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{\mathbf{a}}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\bar{\mathbf{a}}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

Для решения таких трудоёмких задач необходимо использовать пакеты компьютерной алгебры. Воспользуемся свободным пакетом Maxima. Напишем простую программу в которой используем три встроенные функции:

- (1) `matrix` — по строчкам задаём матрицу состоящую из векторов;
- (2) `rank` — вычисляем ранг матрицы;
- (3) `triangularize` — приводим матрицу к трапециальному виду.

```
kill(all)$  
x:matrix([1,0,2,-1],[2,1,1,0],[1,1,1,1],[3,1,3,-1],[1,0,0,-1])$  
r:rank(x);  
A:triangularize(x);  
x1:matrix([1,0,2,-1],[2,1,1,0],[1,1,1,1])$  
B:triangularize(x1);
```



Пример 19.6. Найти размерность подпространства и какой-нибудь базис линейной оболочки образованной системой пяти арифметических векторов линейного пространства $\mathbb{R}^4$: $\bar{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\bar{\mathbf{a}}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\bar{\mathbf{a}}_5 = (0, 1, 2, 3)$.

```
kill(all)$
x:matrix([1,0,2,-1],[2,1,1,0],[1,1,1,1],[3,1,3,-1],[1,0,0,-1])$
r:rank(x);
A:triangularize(x);
x1:matrix([1,0,2,-1],[2,1,1,0],[1,1,1,1])$
B:triangularize(x1);
```

$$(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Получили:

- (1) размерность подпространства равна трём;
- (2) вектора $\bar{\mathbf{a}}_1 = (1, 0, 2, -1)$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\bar{\mathbf{a}}_3 = (1, 1, 1, 1)$ образуют базис полученного подпространства.

$$\begin{matrix} (r) & 3 \\ (A) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (B) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



Задачи

В задачах 3.45–3.49 требуется установить, являются ли заданные множества подпространством в соответствующих пространствах. В случае положительного ответа найти их размерность.

3.45. Множество всех геометрических векторов из V_3 :

- а) компланарных фиксированной плоскости;
- б) удовлетворяющих условию $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0$, где $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор;
- в) удовлетворяющих условию $|\mathbf{x}| = 1$.

3.46. Множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ вида:

- а) $\mathbf{x} = (0, x_2, 0, x_4, x_5, \dots, x_n)$;
- б) $\mathbf{x} = (1, x_2, 1, x_4, x_5, \dots, x_n)$.

3.49. Множество всех функций $f(t) \in C_{[a, b]}$ удовлетворяющих условиям:

- а) $f(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in [a, b]$;
- б) $f(t_0) = 1$ для некоторого $t_0 \in [a, b]$;



Линейной оболочкой системы Q называется множество векторов

$$\mathcal{L}(Q) = \{x | x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s, x_1, \dots, x_s \in Q\}.$$

3.51. Найти размерность линейной оболочки $\mathcal{L}(x_1, x_2)$ арифметических векторов $x_1 = (1, 0, 2, -1)$, $x_2 = (0, -1, 2, 0)$. Показать, что $x = (1, -1, 4, -1) \in \mathcal{L}(x_1, x_2)$.

Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки заданной системы арифметических векторов:

3.52. $x_1 = (1, 0, 0, -1)$, $x_2 = (2, 1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 1, 1, 1)$, $x_4 = (1, 2, 3, 4)$, $x_5 = (0, 1, 2, 3)$.

3.53. $x_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $x_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $x_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $x_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$, $x_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

3.54*. Показать, что линейная оболочка системы многочленов $-3t^2 - 1$, $2t^2 + t$, $-t$ совпадает с пространством $\mathcal{P}_3$ всех многочленов степени ≤ 2 .

пространство размерности n . **3.51.** 2. **3.52.** 3; один из базисов есть, например, $\mathfrak{B} = (x_1, x_2, x_4)$. **3.53.** 3; один из базисов есть, например, $\mathfrak{B} = (x_1, x_2, x_5)$. **3.54.** Указание. Заданная система многочленов линейно независима. **3.55.** $\mathcal{L}(a)$ — прямая $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $\mathcal{L}(a) + b$ —





Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

