РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и программирования

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 4

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

Берков Николай Андреевич

4 марта 2023г

Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть даны два базиса линейного пространства $\mathbb{V}$: $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$. Каждый вектор $\bar{\mathbf{f}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ из базиса $\mathfrak{B}_F$ может быть разложен по первому базису $\mathfrak{B}_E$:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{f}}_1 = p_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + p_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + p_{n1}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 = p_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + p_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + p_{n2}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{\mathbf{f}}_n = p_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + p_{2n}\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + p_{nn}\bar{\mathbf{e}}_n. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Замечание 2.1. *У коэффициентов p_{ij} первый индекс указывает на порядковый номер базисного вектора в первом базисе $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$, а второй — на порядковый номер базисного вектора во втором базисе $\mathfrak{B}_{\mathbf{F}} = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$.*

Формулу (2.6) можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}^T_{E\to F}\mathbf{E}, \qquad (2.7)$$

где

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1 \\ \bar{\mathbf{f}}_2 \\ \ldots \\ \bar{\mathbf{f}}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ \bar{\mathbf{e}}_2 \\ \ldots \\ \bar{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Определение 2.1. *Матрица $\mathbf{P}_{\mathbf{E}\to\mathbf{F}}$, столбцами которой являются координаты векторов базиса $\mathfrak{B}_{\mathbf{F}}$ в базисе $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}}$, называется матрицей перехода от базиса $\mathfrak{B}_{\mathbf{E}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ к базису $\mathfrak{B}_{\mathbf{F}} = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$.*

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

Пусть в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n\} = \{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ задан вектор $\bar{\mathbf{x}} = x_1\,\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + x_n\,\bar{\mathbf{e}}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Найдём координаты этого же вектора в новом базисе $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{f}}_n\} = \{\bar{\mathbf{f}}_i\}$. Обозначим искомые координаты $\bar{\mathbf{x}} = y_1\,\bar{\mathbf{f}}_1 + y_2\,\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + y_n\,\bar{\mathbf{f}}_n = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Теорема 4.1. *Если* $\mathbf{P}_{E\to F}$ *— матрица перехода от базиса* $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ *к базису* $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_i\}$, *то переход от координат вектора* $\bar{\mathbf{x}}$ *заданного в первом базисе к его координатам во втором базисе осуществляется по формулам:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

или

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

Или ещё в более краткой форме

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F}\mathbf{X}, \qquad (4.3)$$

Ввиду практической ценности процесса доказательства данной теоремы, докажем её.

$$\blacktriangleright \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}/\Delta & P_{21}/\Delta & \dots & P_{n1}/\Delta \\ P_{12}/\Delta & P_{22}/\Delta & \dots & P_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n}/\Delta & P_{2n}/\Delta & \dots & P_{nn}/\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Т.к. P – матрица перехода от старого базиса $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ новому $\{\bar{\mathbf{f}}_i\}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^T \mathbf{e},$$

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{P}^T\right)^{-1} \mathbf{f}.$$

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = \dfrac{P_{11}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \dfrac{P_{12}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \dfrac{P_{1n}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = \dfrac{P_{21}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \dfrac{P_{22}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \dfrac{P_{2n}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{\mathbf{e}}_n = \dfrac{P_{n1}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \dfrac{P_{n2}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \dfrac{P_{nn}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n. \end{cases} \qquad (2.12)$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \dots & P_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n} & P_{2n} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + x_n\bar{\mathbf{e}}_n = x_1\left(\frac{P_{11}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{12}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{1n}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n\right) +$$

$$+x_2\left(\frac{P_{21}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{22}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{2n}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n\right) + \cdots + x_n\left(\frac{P_{n1}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{n2}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{nn}}{\Delta}\bar{\mathbf{f}}_n\right) =$$

$$\overline{x} = x_1\,\overline{\mathbf{e}}_1 + x_2\,\overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + x_n\,\overline{\mathbf{e}}_n = x_1\left(\frac{P_{11}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{12}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{1n}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_n\right) +$$

$$+x_2\left(\frac{P_{21}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{22}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{2n}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_n\right) + \cdots + x_n\left(\frac{P_{n1}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_1 + \frac{P_{n2}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_2 + \ldots + \frac{P_{nn}}{\Delta}\overline{\mathbf{f}}_n\right) =$$

Перегруппируем слагаемые

$$= \left(\frac{P_{11}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{21}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{n1}}{\Delta}x_n\right)\overline{\mathbf{f}}_1 + \left(\frac{P_{12}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{22}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{n2}}{\Delta}x_n\right)\overline{\mathbf{f}}_2 + \ldots$$

$$+\left(\frac{P_{1n}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{2n}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{nn}}{\Delta}x_n\right)\overline{\mathbf{f}}_n =$$

$$= y_1\overline{\mathbf{f}}_1 + y_2\overline{\mathbf{f}}_2 + \ldots + y_n\overline{\mathbf{f}}_n.$$

Приравнивая коэффициенты при $\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{f}}_n$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{P_{11}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{21}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{n1}}{\Delta}x_n, \\ y_2 = \frac{P_{12}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{22}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{n2}}{\Delta}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \frac{P_{1n}}{\Delta}x_1 + \frac{P_{2n}}{\Delta}x_2 + \ldots + \frac{P_{nn}}{\Delta}x_n. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Полученную систему запишем в матричном виде

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}/\Delta & P_{21}/\Delta & \dots & P_{n1}/\Delta \\ P_{12}/\Delta & P_{22}/\Delta & \dots & P_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1n}/\Delta & P_{2n}/\Delta & \dots & P_{nn}/\Delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Теорема доказана.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}_{E \to F} \mathbf{X}, \tag{4.3}$$

где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ — матрицы-столбцы задающие координаты одного и того же вектора в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$, соответственно.

Если данную формулу умножить слева на матрицу перехода $\mathbf{P}_{E \to F}$, получим

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \to F} \mathbf{Y} \tag{4.4}$$

Пример 4.1. *Векторы* $\overline{\mathbf{a}} = (-2,5,1), \overline{\mathbf{b}} = (3,2,-7), \overline{\mathbf{c}} = (4,-3,2)$, $\overline{\mathbf{d}} = (-4,22,-13)$ *заданы своими координатами в каноническом базисе* $\mathfrak{B}_I = \{\overline{\mathbf{i}}, \overline{\mathbf{j}}, \overline{\mathbf{k}}\}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}_3$. *Найти разложение вектора* $\overline{\mathbf{d}}$ *по базису* $\mathfrak{B}_F = \{\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\}$. *Сделать проверку.*

◀При решении примера 2.1 было доказано, что система векторов $\overline{\mathbf{a}} = (-2,5,1), \overline{b} = (3,2,-7)$, $\overline{c} = (4,-3,2)$ образует базис в пространстве $\mathbb{V}_3$. Матрицей перехода к полученному базису является

$$\mathbf{P}_{I\to F} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём теперь координаты вектора $\overline{\mathbf{d}}_F = x\overline{\mathbf{a}} + y\overline{\mathbf{b}} + z\overline{\mathbf{c}}$ в новом базисе. Применяем формулу (4.3).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}_{I\to F} \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Находим определитель матрицы перехода

$$|\mathbf{P}_{I\to F}| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix} = -153.$$

Найдём все девять алгебраических дополнений

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = -17; P_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = -34; P_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -17;$$

$$P_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -13; \quad P_{22} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8; P_{32} = -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 14;$$

$$P_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -37; \quad P_{23} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -11; P_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -19.$$

Получили $\mathbf{P}^{-1}_{I\to F} = \frac{1}{153}\begin{pmatrix} 17 & 34 & 17 \\ 13 & 8 & -14 \\ 37 & 11 & 19 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{153}\begin{pmatrix} 17 & 34 & 17 \\ 13 & 8 & -14 \\ 37 & 11 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -13 \end{pmatrix} = \frac{1}{153}\begin{pmatrix} 459 \\ 306 \\ -153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, в новом базисе координаты вектора $\overline{\mathbf{d}}$ равны $\overline{\mathbf{d}}_F = (3, 2, -1)$.

Для проверки подставим координаты базисных векторов

$$\overline{\mathbf{d}}_F = 3\overline{\mathbf{a}} + 2\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}} = 3(-2, 5, 1) + 2(3, 2, -7) - (4, -3, 2) =$$
$$= (3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 - 4;\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3;\ 3 + 2 \cdot (-7) - 2) =$$
$$= (-4;\ 22;\ -13).$$

Ответ: $\overline{\mathbf{d}}_F = (3, 2, -1)$. ▶

Пример 4.2. *В линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^2$ *найти матрицу перехода* $\mathbf{P}_{I\to E}$ *от базиса* $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\}$ *к базису* $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$, *который получается поворотом первого базиса относительно начала координат против часовой стрелки на угол* φ. *Найти координаты произвольной точки* $M(x, y)$ *в новом базисе* $\mathfrak{B}_E$.

►Найдём координаты новых базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$ в базисе $\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}$. На рис. 1 изображены оба базиса и новая система координат u, v. Проектируя базисные вектора на оси координат, получаем

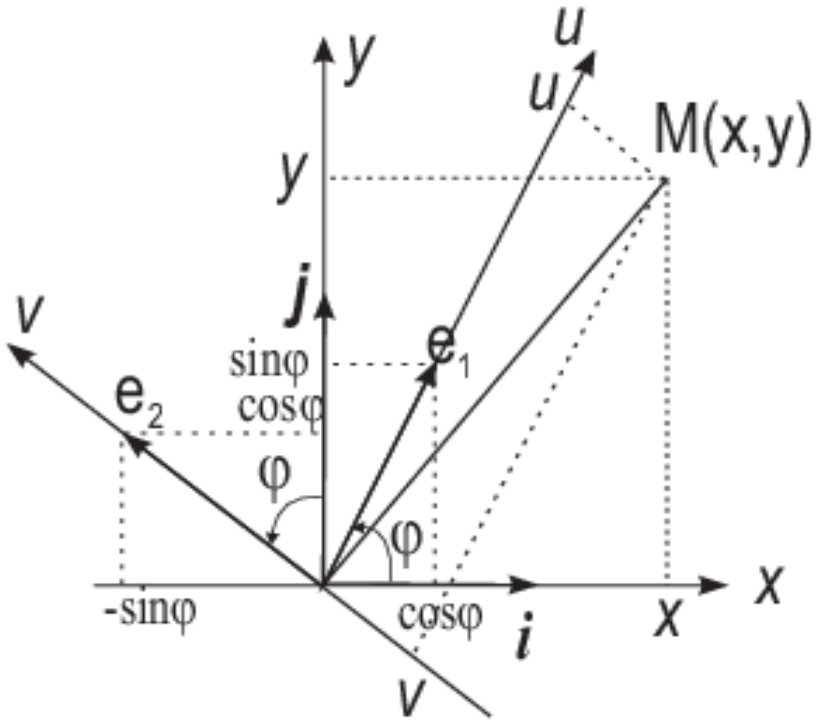
$$\begin{cases} \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos\varphi\ \bar{\mathbf{i}} + \sin\varphi\ \bar{\mathbf{j}}, \\ \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin\varphi\ \bar{\mathbf{i}} + \cos\varphi\ \ j. \end{cases}$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_1$ к базису $\mathfrak{B}_2$ равна

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{B}_I\to\mathfrak{B}_E} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{P}_{\mathfrak{B}_I\to\mathfrak{B}_E}| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

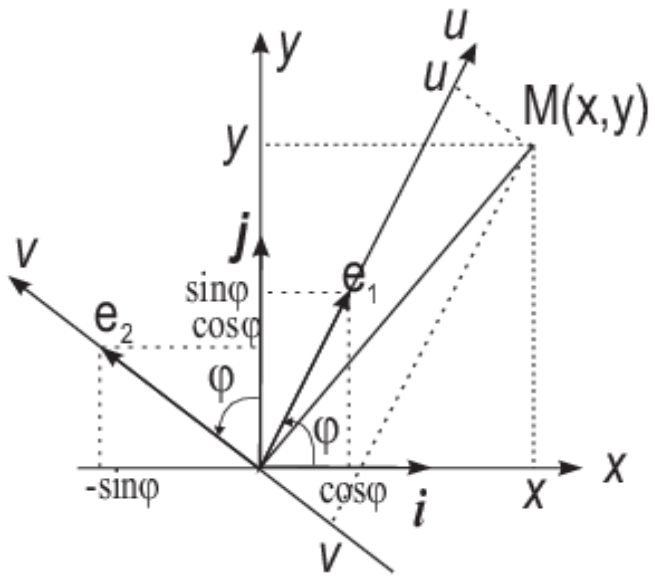


$$\mathbf{P}_{\mathfrak{B}_I \to \mathfrak{B}_E} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1}_{\mathfrak{B}_I \to \mathfrak{B}_E} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Координаты точки $M(x, y)$ в новой системе координат вычисляются по следующим формулам

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{pmatrix}$$



4.2. Матрица перехода между базисами заданными в третьем базисе

Пример 4.3. *В линейном пространстве* $\mathbb{V}_3$ *в каноническом базисе* $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ *заданы два базиса* $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1(-1,0,-2), \bar{\mathbf{e}}_2(2,-1,3), \bar{\mathbf{e}}_3(-1,9,-6)\}$ *и* $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1(1,-7,8), \bar{\mathbf{f}}_2(-1,1,-1), \bar{\mathbf{f}}_3(1,6,-5)\}$. *Найти матрицу перехода* $\mathbf{P}_{E\to F}$ *от базиса* $\mathfrak{B}_E$ *к базису* $\mathfrak{B}_F$ *и координаты вектора* $\bar{\mathbf{d}} = -4\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_3$ *в базисе* $\mathfrak{B}_F$.

◀Используем формулу (2.12) для перехода от канонического базиса $\mathfrak{B}_I$ к новым базисам $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}^T_{I\to E}\mathbf{I}. \tag{4.8}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}^T_{I\to F}\mathbf{I}. \tag{4.9}$$

Умножая уравнение (4.8) слева на $\left(\mathbf{P}^T_{I\to E}\right)^{-1}$, получаем

$$\mathbf{I} = (\mathbf{P}^T_{I\to E})^{-1}\mathbf{E}.$$

Подставляем полученное выражение в формулу (4.9)

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}^T_{I\to F}\mathbf{I} = \mathbf{P}^T_{I\to F}(\mathbf{P}^T_{I\to E})^{-1}\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}^T_{I\to F}\mathbf{I} = \mathbf{P}^T_{I\to F}(\mathbf{P}^T_{I\to E})^{-1}\mathbf{E}.$$

Получаем транспонированную матрицу перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{P}^T_{E\to F} = \mathbf{P}^T_{I\to F}(\mathbf{P}^T_{I\to E})^{-1} = \mathbf{P}^T_{I\to F}(\mathbf{P}^{-1}_{I\to E})^T = \left(\mathbf{P}^{-1}_{I\to E}\mathbf{P}_{I\to F}\right)^T$$

Выполняя операцию транспонирования полученного уравнения, получаем искомую матрицу перехода $\mathbf{P}_{E\to F}$ от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \mathbf{P}^{-1}_{I\to E}\mathbf{P}_{I\to F}. \qquad (4.10)$$

Вернёмся к решению примера 4.3.

Пример 4.3. *В линейном пространстве* $\mathbb{V}_3$ *в каноническом базисе* $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ *заданы два базиса* $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1(-1,0,-2), \bar{\mathbf{e}}_2(2,-1,3), \bar{\mathbf{e}}_3(-1,9,-6)\}$ *и* $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1(1,-7,8), \bar{\mathbf{f}}_2(-1,1,-1), \bar{\mathbf{f}}_3(1,6,-5)\}$. *Найти матрицу перехода* $\mathbf{P}_{E\to F}$ *от базиса* $\mathfrak{B}_E$ *к базису* $\mathfrak{B}_F$ *и координаты вектора* $\bar{\mathbf{d}} = -4\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2 - \bar{\mathbf{e}}_3$ *в базисе* $\mathfrak{B}_F$.

$$\mathbf{P}_{I\to E} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_{I\to F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \\ -2 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 21 - 34 = -13.$$

$$(\mathbf{P}_{I\to E})^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 21 & -9 & 17 \\ 18 & -4 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 21 & -9 & 17 \\ 18 & -4 & -9 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -7 & 1 & 6 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решаем теперь вторую часть задачи. Вектор $\overline{\mathbf{d}}$ задан в базисе $\mathfrak{B}_E$: $\overline{\mathbf{d}} = -4\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2 - \overline{\mathbf{e}}_3$. Найти координаты этого вектора в базисе $\mathfrak{B}_F = \{\overline{\mathbf{f}}_1, \overline{\mathbf{f}}_2, \overline{\mathbf{f}}_3\}$. Для этого используем формулу (4.3)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления обратной матрицы применяем формулу

$$\mathbf{P}^{-1}_{E\to F} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = -1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\Delta = -1\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbf{P}_{E\to F} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Находим алгебраические дополнения

$$P_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad P_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad P_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$P_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad P_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \qquad P_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$P_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad P_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad P_{33} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$\mathbf{P}^{-1}_{E\to F} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}_{E\to F} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Получили: $\overline{\mathbf{d}}_{\mathbf{F}} = 4\overline{\mathbf{f}}_1 + 0 \cdot \overline{\mathbf{f}}_2 + 3\overline{\mathbf{f}}_3.$

Пример *Доказать, что множество функций* $\mathbf{L} = \left\{ f(t) = \alpha + \right.$

$\left. + \beta e^{-t} + \gamma \operatorname{ch} t + \delta e^{t} \,\middle|\, \alpha, \beta, \gamma, \delta,\ t \in \mathbb{R} \right\}$ *образуют линейное пространство. Найти его размерность и базис. Разложить по полученному базису функцию* $g(t) = 2 + 4e^{-t} + 3e^{t}$.

►Преобразуем функцию, заменив значения гиперболической функций экспонентами $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2}$.

$$f(t) = \alpha + \beta e^{-t} + \frac{\gamma}{2} e^{t} + \frac{\gamma}{2} e^{-t} + \delta e^{t} = \alpha + \beta_1 e^{-t} + \gamma_1 e^{t}, \text{ где } a = \alpha,$$

$b = \gamma_1 + \dfrac{\gamma}{2} \in \mathbb{R}$, $c = \delta + \dfrac{\gamma}{2} \in \mathbb{R}$.

После таких преобразований, заданное множество функций $f(t)$ имеет вид:

$$\mathbf{L} = \left\{ f(t) = a + be^{-t} + ce^{t} \,\middle|\, a,\ b,\ c,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Пусть $g(t) \in \mathbf{L}$, $g(t) = a_1 + b_1 e^{-t} + c_1 e^{t}, a_1, b_1, c_1, \in \mathbb{R}$. Тогда $f(t) + g(t) =$

$= a + be^{-t} + ce^{t} + a_1 + b_1 e^{-t} + c_1 e^{t} = a_2 + b_2 e^{-t} + c_2 e^{t}$, где $a_2 = a + a_1$,

$b_2 = b + b_1$, $c_2 = c + c_1 \in \mathbb{R}$.

Следовательно $f(t) + g(t) \in \mathbf{L}$.

$\alpha f(t) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot be^{-t} + \alpha \cdot ce^{t} = a_3 + b_3 e^{-t} + c_3 e^{t}$, где $a_3 = \alpha \cdot a$,

$b_3 = \alpha \cdot b$, $c_3 = \alpha \cdot c \in \mathbb{R}$.

Следовательно $\alpha f(t) \in \mathbf{L}$.

2. Проверяем выполнимость всех восьми аксиом.

1) $f(t)+g(t)=(a+a_1)+(b+b_1)e^{-t}+(c+c_1)e^{t}=g(t)+f(t)$.

2) Если $h(t)=a_2+b_2e^{-t}+c_2e^{t}\in\mathbf{L}$, то $(f(t)+g(t))+h(t)=(a+a_1+a_2)+(b+b_1+b_2)e^{-t}+(c+c_1+c_2)e^{t}=g(t)+(f(t+h(t))$.

3) Нулевой элемент $\overline{0}=(0,0,0)$, получается из решений системы $a=b=c=0$.

4) Обратным элементом к произвольному элементу $f(t)=a+be^{-t}+ce^{t}\in\mathbf{L}$ является элемент $-f(t)=-a-be^{-t}-ce^{t}$.

Выполнимость остальных четырёх гипотез, следует из свойств умножения действительных чисел.

5) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$ *(умножение на 1 не изменяет элемент);*

6) $\lambda(\mu\overline{x})=(\lambda\mu)\overline{x}$ *(умножение на число ассоциативно);*

7) $\lambda(\overline{x}+\overline{y})=\lambda\overline{x}+\lambda\overline{y}$ *(дистрибутивность на элементе);*

8) $(\lambda+\mu)\overline{x}=\lambda\overline{x}+\mu\overline{x}$.

В качестве базисных векторов выберем систему трёх линейно независимые функции $\{1,e^{-t},e^{t}\}$.

Для доказательства независимости системы функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ заданной на некотором интервале $t \in [a, b]$, вычисляется определитель n-го порядка, первая строка которого совпадает с исследуемой системой, а последующие строки состоят из производных возрастающего порядка. Такой определитель называется определитель Вронского.

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & \ldots & y_n''(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \qquad (20.11)$$

Если определитель Вронского $W(t)$ системы функций $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ не равен тождественно нулю при $t \in [a, b]$, то система функций линейно независима в интервале $t \in [a, b]$.

Найти его размерность и базис. Разложить по полученному базису функцию $g(t) = 2 + 4e^{-t} + 3e^{t}$.

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} & e^{t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{t} \\ 0 & e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = -e^{-t}e^{t} - e^{-t}e^{t} = -2.$$

Определитель Вронского тождественно не равен нулю, следовательно система функций $\{1, e^{-t}, e^{t}\}$ линейно независима, и её можно выбрать в качестве базиса пространства $\mathfrak{B}_{\mathbf{L}} = \left\{\overline{\mathbf{e}}_1 = 1, \overline{\mathbf{e}}_2 = e^{-t}, \overline{\mathbf{e}}_3 = e^{t}\right\}$.

$\mathtt{dim}\,\mathbf{L} = 3$.

$g(t) = 2 + 4e^{-t} + 3e^{t} = 2\overline{\mathbf{e}}_1 + 4\overline{\mathbf{e}}_2 + 3\overline{\mathbf{e}}_3$. ▶

Пример 4.4. *Проверить, что множество многочленов* $\mathbf{L} = \left\{ p(t) \in \mathbb{P}_2 \middle| \; p(t) = (2a - 3b)t^2 - 2bt - a,\; a, b, t \in \mathbb{R} \right\}$ *образует подпространство в линейном пространстве* $\mathbb{P}_2$ *многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис* $\mathbf{L}$. *Проверить, что многочлен* $g(t) = 3t^2 - 2t - 3 \in \mathbf{L}$ *и разложить его по построенному базису. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства* $\mathbb{P}_2$.

◀Заданное множество является подмножеством линейного пространства $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2. Согласно определению 3.1, данное множество $\mathbf{L}$ будет линейным подпространством пространства $\mathbb{P}_2$, если оно замкнуто относительно операции сложения многочленов и умножения многочлена на число.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $q(t) = (2a_1 - 3b_1)t^2 + 2b_1 t - a_1 \in \mathbf{L}$, где $a_1 b_1 \in \mathbb{R}$.

$p(t) = (2a - 3b)t^2 - 2bt - a,\; a, b, t \in \mathbb{R}$

Проверяем замкнутость заданного множества $\mathbf{L}$.

1) $p(t) + q(t) = (2(a + a_1) - 3(b + b_1))t^2 + 2(b + b_1)t - (a + a_1) =$
$= (a_2 - 3b_2)t^2 + 2b_2 t - a_2$, где $a_2 = a + a_1,\; b_2 = b + b_1 \in \mathbb{R}$.
Следовательно, элемент $p(t) + q(t)$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции сложения многочленов.

2) $\alpha p(t) = \alpha(2a - 3b)t^2 - \alpha 2bt - \alpha a = (2a_3 - 3b_3)t^2 - 2b_3 t - a_3$, где $a_3 = \alpha a,\; b_3 = \alpha b \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции умножения многочлена на число.

Согласно теореме 3.1, линейная оболочка $\mathbf{L} = \{p(t) \mid p(t) = (2a-3b)t^2 - 2bt - a,\ a,b,t \in \mathbb{R}\}$ совпадает с подпространством $\mathbf{L}$. Построим базис этого подпространства.

Теорема 3.1. *Любое подпространство конечномерного векторного пространства является подпространством, порождённым некоторым набором векторов (например, своим базисом).*

Для этого произвольным действительным переменным a и b определяющим совокупность векторов оболочки, придадим значения $\{(a=1,b=0),(a=0,b=1)\}$. В результате получаем ***базис*** подпространства $\mathbf{L}$

$$\mathfrak{B}_L = \{\overline{\mathbf{e}}_1 = 2t^2 - 1, \overline{\mathbf{e}}_2 = -3t^2 - 2t\}.$$

В полученном базисе общий элемент оболочки $\mathbf{L}$ можно записать в виде линейной комбинации базисных веторов

$$p(t) = (2a-3b)t^2 - 2bt - a = a\overline{\mathbf{e}}_1 + b\overline{\mathbf{e}}_2 = a(2t^2-1) + b(-3t^2-2t),\ a,b \in \mathbb{R}.$$

Теперь выпишем матрицу преобразования из канонического базиса $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1,t,t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$ в линейное подпространство L с базисом $\mathfrak{B}_L$.

$$\mathbf{P}_{P_2 \to L} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Легко заметить, что ранг матрицы $\mathbf{P}_{P_2 \to L}$ равен 2. Размерность линейного подпространства совпадает с количеством базисных векторов, образующих подпространство.

Следовательно, $\mathtt{dim}(\mathbf{L}) = 2$.

Дополним базис двумерного подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{P}_2$.

Для этого надо найти любой вектор $\bar{\mathbf{e}}_3$ такой, что базисные вектора $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ будут линейно независимыми. Для заданного примере возьмём простейший третий базисный вектор $\bar{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)$.

В результате $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$

Получили расширение базиса подпространства $\mathbf{L}$ до базиса пространства $\mathbb{P}_2$:
$\mathfrak{B}_{L_3} = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = (-1; 0; 2), \bar{\mathbf{e}}_2 = (0; -2; -3), \bar{\mathbf{e}}_3 = (1, 0, 0)\}.$

Полученные базисные вектора можно записать в виде трёх независимых полиномов:
$\mathfrak{B}_{L_3} = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = 2t^2 - 1, \bar{\mathbf{e}}_2 = -3t^2 - 2t, \bar{\mathbf{e}}_3 = 1\}.$

Согласно определению 3.5 двумерное линейное подпространство $\mathbf{L}$ и одномерное пространство являющееся линейной оболочкой третьего базисного вектора $L(\bar{\mathbf{e}}_3)$ представляют прямую сумму пространства $\mathbb{P}_2$.

$$\mathfrak{B}_{L_3} = \{\overline{\mathbf{e}}_1 = 2t^2 - 1, \overline{\mathbf{e}}_2 = -3t^2 - 2t, \overline{\mathbf{e}}_3 = 1\}.$$

Выпишем матрицу перехода от канонического базиса $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства P_2 к новому базису $\mathfrak{B}_{L_3} = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3\}$, содержащему базис $\mathfrak{B}_L = \{\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2\}$ подпространство $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{P}_{P_2 \to L_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось найти координаты многочлена $g(t) = 3t^2 - 2t - 3$ в базисе $\mathfrak{B}_L$ подпространства $\mathbf{L}$.

Данная задача разрешима, если многочлен $g(t)$ принадлежит подпространству $\mathbf{L} = \{p(t) \mid p(t) = (2a-3b)t^2 - 2bt - a,\ a,b,t \in \mathbb{R}\}$. Легко подобрать значения параметров a и b при котором получается заданный полином $g(t) = 3t^2 - 2t - 3$.

Для данного примера, $a = 3, b = 1$. Подставляем эти значения:
$p(t) = (6-3)t^2 - 2t - 3 = 3t^2 - 2t - 3 \quad \Rightarrow g(t) \in \mathbf{L}$.

Раскладываем полином $g(t) = 3t^2 - 2t - 3$ по базису подпространства $\mathbf{L}$: $\mathfrak{B}_L = \{\overline{\mathbf{e}}_1 = 2t^2 - 1, \overline{\mathbf{e}}_2 = -3t^2 - 2t\}$.

$g(t) = \alpha_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{e}}_2$.

$g(t) = 3t^2 - 2t - 3 = \alpha_1(2t^2 - 1) + \alpha_2(-3t^2 - 2t). \quad \Rightarrow$
$3t^2 - 2t - 3 = (2\alpha_1 - 3\alpha_2)t^2 - 2\alpha_2 t - \alpha_1$.

Получаем, $\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = 1, \quad 6 - 6 = 0$.
Т.е. $g(t) = 2t^2 - 2t - 3 = 3\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2 = 3(2t^2 - 1) + (-3t^2 - 2t)$.

▶

Пример 4.6. *Образуют ли матрицы* $\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *базис в пространстве матриц* $\mathbb{M}_{2\times 2}$*? Записать матрицу перехода от канонического базиса к данному и разложить матрицу* $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *в новом базисе.*

◀Для доказательства независимости этой системы векторов, рассмотрим их линейную комбинацию

$$a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2 + c\mathbf{F}_3 + d\mathbf{F}_4 =$$
$$= a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-2b+d & c+d \\ a+c & b \end{pmatrix}.$$

Результат приравниваем к нулевой матрице. Получаем систему четырёх простых линейных однородных уравнений.

$$\begin{cases} 2a-2b+d=0, \\ c+d=0, \\ a+c=0, \\ b=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0, \\ a=-c, \\ d=-c, \\ -2c-c=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ b=0, \\ c=0, \\ d=0. \end{cases}$$

Следовательно, система векторов $\mathfrak{B}_F$ линейно независима и образует базис в пространстве $\mathbb{M}_{2\times 2}$.

Разложим полученные базисные вектора $\mathfrak{B}_F = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$ в каноническом базисе $\mathfrak{B}_{M_{2\times 2}} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$:

$$\mathfrak{B}_F = \left\{ \mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\mathfrak{B}_{M_{2\times 2}} = \left\{ \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1 = 2\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{F}_2 = -2\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4, \\ \mathbf{F}_3 = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \\ \mathbf{F}_4 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_4 \end{pmatrix}$$

$$P_{M_{2\times 2}\to F} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

является матрицей перехода от канонического базиса $\mathfrak{B}_{M_{2\times 2}} = \{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4\}$ пространства $\mathbb{M}_{2\times 2}$ к новому базису этого же пространства $\mathfrak{B}_F = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4\}$.

Осталось найти координаты заданного вектора $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

$$\begin{pmatrix} 2a-2b+d & c+d \\ a+c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a-2b+d=2, \\ c+d=-2, \\ a+c=2, \\ b=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3, \\ a=2-c, \\ d=-2-c, \\ 4-2c-6-2-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=3, \\ c=-3, \\ a=5, \\ d=1. \end{cases} \blacktriangleright$$

Ответ: $D_F = 5\mathbf{F}_1 + 3\mathbf{F}_2 - 3\mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 = (5;3;-3;1)$.

Пример 4.7. *Пусть* $\mathbf{L}$ *– множество многочленов степени не выше 2, удовлетворяющих условию* $2p(0) - 4p'(0) + p''(0) = 0$. *Доказать, что* $\mathbf{L}$ *является линейным подпространством в пространстве* $\mathbb{P}_2$. *Найти его базис и размерность. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства* $\mathbb{P}_2$.

◀Рассмотрим произвольным многочлен $p(t) = at^2 + bt + c \ \in \mathbb{P}_2$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Найдём производные

$$p'(t) = 2at + b, \ p''(t) = 2a. \ \Rightarrow p(0) = c, p'(0) = b, \ p''(0) = 2a.$$

Так как $2p(0) - 4p'(0) + p''(0) = 0 \Rightarrow 2c - 4b + 2a = 0 \Rightarrow c = 2b - a.$

Получаем подмножество многочленов второй степени

$$\mathbf{L} = \left\{ p(t) \,\middle|\, p(t) = at^2 + bt + (2b - a), a, b, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\mathbf{L} = \left\{ p(t) \,\middle|\, p(t) = at^2 + bt + (2b - a), a, b, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Докажем, что данное множество является подпространством пространства $\mathbb{P}_2$. Проверяем его замкнутость относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

$(at^2 + bt + 2b - a) + (a_1t^2 + b_1t + 2b_1 - a_1) = a_2t^2 + b_2t + 2b_2 - a_2$, где $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2 = a + a_1, b_2 = b + b_1 \in \mathbb{R}$.

$\alpha(at^2 + bt + 2b - a) = a_3t^2 + b_3t + (2b_3 - a_3),\ a_3, b_3 \in \mathbb{R}$.

Множество замкнуто относительно операций умножения на число.

Получим базисные вектора

$a = 1,\ b = 0 \ \Rightarrow\ p_1(t) = t^2 - 1,$

$a = 0,\ b = 1 \ \Rightarrow\ p_2(t) = t + 2.$

$\dim \mathbf{L} = 2; \quad \mathfrak{B}_L = \{t^2 - 1; t + 2\}.$

В каноническом базиса $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1; t; t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$ полученные, базисные вектора можно записать в виде:

$\bar{\mathbf{e}}_1 = (-1; 0; 1)$ и $\bar{\mathbf{e}}_2 = (2; 1; 0)$.

Выпишем полученную матрицу перехода от канонического базиса $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1; t; t^2\}$ к базису $\mathfrak{B}_L = \{t^2 - 1; t + 2\}$

$$\mathbf{P}_{P_2 \to L} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дополним базис $\mathfrak{B}_L = \{t^2 - 1; t + 2\}$ до базиса пространства $\mathbb{P}_2$, добавим вектор $p_3(t) = 1$.

$$\mathbf{P}_{L_3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det \mathbf{P}_{L_3} = -1 \Rightarrow$ вектора $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ образуют базис.
$\mathfrak{B}_{L_3} = \{t^2 - 1; t + 2; 1\}$. ▶

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич