

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 5

Линейные операторы и их матрицы. Действия с линейными операторами

Берков Николай Андреевич

11 марта 2023г

Линейный оператор, его свойства.

5.1. Отображения

Определение 5.1. Отображение множества X во множество Y — это правило, по которому каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y .

Для отображения вводятся следующие обозначения $f : X \rightarrow Y$, или $X \xrightarrow{f} Y$.

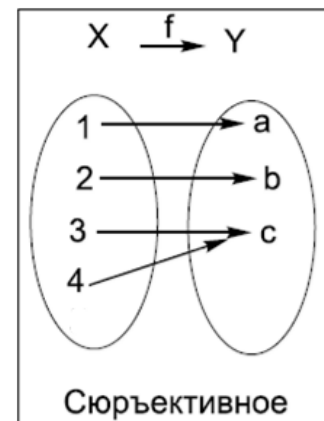
При этом множество X называется областью определения отображения и обозначается $X = D(f)$. А множество $E(f)$ называется множеством значений отображения, и $E(f) = \{y \in Y \mid x \in X, y = f(x)\}$.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — некоторое отображение из множества X в множество Y . Если элемент $x \in X$ при этом отображении сопоставляется элементу $y \in Y$, то $y = f(x)$. При этом элемент $y \in Y$ называется образом $x \in X$, или значением отображения f в точке x . А $x \in X$, соответственно, прообразом элемента $y \in Y$.

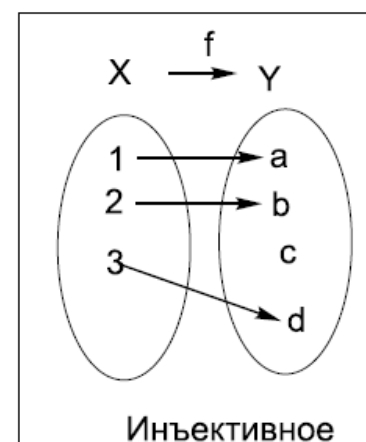
Исходя из определения отображения, видно, что не требуется, чтобы все элементы в множестве Y являлись образами какого-либо $x \in X$ и при том единственного.



Определение 5.2. *Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется **сюръективным**, если каждый элемент из множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X .*



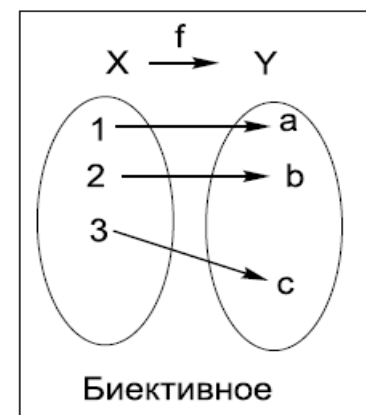
Определение 5.3. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **инъективным**, если каждый элемент из множества X отображается только в один элемент множества Y . При этом не обязательно, чтобы все элементы множества Y имели прообразы.*



Определение 5.4. *Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **биективным**, если каждый элемент из множества X отображается только в один элемент множества Y и каждый элемент множества Y имеет прообраз.*

Иначе, отображение которое является одновременно и сюръективным, и инъективным.

При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством.



Определение 21.5. Функционалом называется отображение $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ произвольного множества X на множество действительных чисел $\mathbb{R}$.



Определение линейного оператора и его свойства

Определение 5.6. Пусть V и W — линейные пространства размерностей n и m соответственно. **Оператором** действующим из V в W , называется отображение $\hat{A} : V \rightarrow W$, сопоставляющее каждому вектору $\bar{x}$ пространства V некоторый вектор $\bar{y}$ пространства W . При этом будем использовать обозначение $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ или $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$.

Вектор $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x}) \in W$ называется **образом** элемента $\bar{x}$, а вектор $\bar{x} \in V$ — **прообразом** элемента $\bar{y}$.

В данном курсе мы будем рассматривать не произвольные операторы, а только те из них, которые являются линейными операторами.

Определение 5.7. **Оператор** $\hat{A} : V \rightarrow W$ называется **линейным**, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$ и любого действительного числа α выполняются равенства:

1. $\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y})$ (свойство **аддитивности** оператора).
2. $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\hat{A}(\bar{x})$ (свойство **однородности** оператора).



Из определения линейного оператора следуют два очень важных свойства:

- 1) Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ нулевой элемент $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbb{V}$ отображает в нулевой элемент $\bar{\mathbf{0}} \in \mathbb{W}$.

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (5.1)$$

- 2) Образом линейной комбинации $\alpha\bar{\mathbf{x}} + \beta\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ является линейная комбинация $\alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{W}$.

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}} + \beta\bar{\mathbf{y}}) = \alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}}. \quad (5.2)$$

Определение 5.8. Если пространство $\mathbb{W}$ совпадает с пространством $\mathbb{V}$, то линейный оператор называется **линейным преобразованием** пространства $\mathbb{V}$.



Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — два линейных оператора, действующих из пространства $\mathbb{V}$ в пространство $\mathbb{W}$, а $\bar{x}$ — произвольный вектор из $\mathbb{V}$, α — произвольное вещественное число.

Определение 5.9. Суммой $\hat{A} + \hat{B}$ этих операторов называется оператор, определяемый равенством $(\hat{A} + \hat{B})\bar{x} = \hat{A}\bar{x} + \hat{B}\bar{x}$.

Определение 5.10. Произведением линейного оператора $\hat{A}$ на число α называется оператор $\alpha\hat{A}$, определяемый равенством $(\alpha\hat{A})\bar{x} = \alpha(\hat{A}\bar{x})$.

Определение 5.11. Нулевым оператором $\hat{O}$ называется оператор, отображающий все элементы пространства $\mathbb{V}$ в нулевой элемент пространства $\mathbb{W}$.

Определение 5.12. Тожественным (или единичным) оператором $\hat{I}$ называется оператор, который произвольный элемент $\bar{x} \in \mathbb{V}$ переводит в себя.

Определение 5.13. Оператором, противоположным оператору $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, отображающий каждый элемент линейного пространства $\bar{x} \in \mathbb{V}$ в элемент $-(\hat{A}\bar{x}) \in \mathbb{W}$.



Примеры линейных операторов

Пример 5.1. Пусть α — произвольное действительное число. Рассмотрим отображение $\hat{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, которое каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{V}$ ставит в соответствие вектор $\alpha\bar{x}$.

Определение Оператор $\hat{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ называется **линейным**, если для любых $\bar{x} \in \mathbb{V}$, $\bar{y} \in \mathbb{W}$ и любого действительного числа α выполняются равенства:

1. $\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y})$ (свойство аддитивности оператора).
2. $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\hat{A}(\bar{x})$ (свойство однородности оператора).

Оба равенства из определения 5.7 линейного оператора выполняются, поэтому данное отображение является линейным оператором. Кроме того, данное отображение преобразует вектору $\bar{x} \in \mathbb{V}$ в другой вектор $\bar{y} = \alpha\bar{x} \in \mathbb{V}$, поэтому данный оператор является линейным преобразованием.

Этот оператор называется оператором гомотеции. Следует отметить, что при $\alpha = 0$, мы получаем нулевой оператор $\hat{0}$, а при $\alpha = 1$ — тождественный (или единичный) оператор $\hat{E}$.



Пример 5.2. Пусть V — множество радиус-векторов в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}_3$. Линейными операторами будут:

1) поворот векторов на угол α ;

2) симметричное отображение относительно любой плоскости или прямой, проходящей через начало координат;

3) проекция на любую плоскость проходящую через начало координат.



Пример 3. Выберем в n -мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольный базис. Любой элемент этого пространства $\bar{x}$ можно представить в координатном виде $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Мы получили линейный оператор $\hat{A}$ который каждому вектору $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие его координатный столбец. Нетрудно проверить, что оба равенства из определения линейного оператора выполняются.



Пример 4. Рассмотрим n -мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ и в нём произвольную прямоугольную матрицу A , содержащую n строк и m столбцов. Сопоставим произвольному элементу $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ любую строку матрицы A .

Используя свойства сложения матриц и умножения матрицы на число, легко доказать, что данное отображение $\hat{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ является линейным оператором.



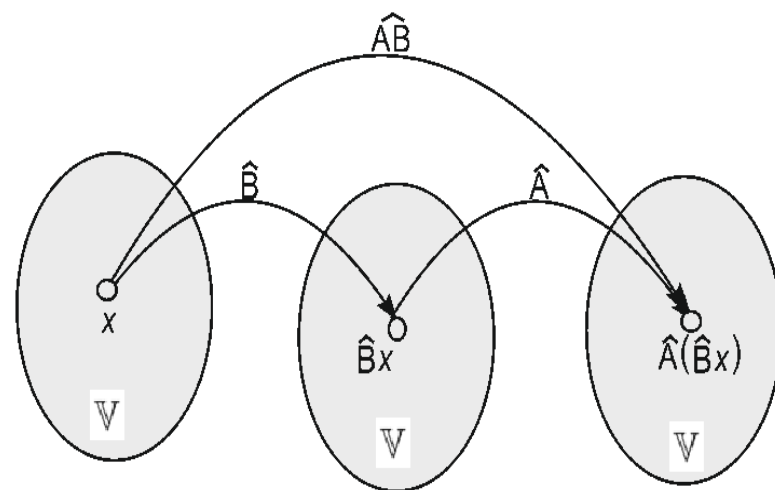
Множество всех линейных операторов действующих из линейного пространства V в линейного пространства W , будем обозначать $L(V, W)$. Запись $\hat{A} \in L(V, W)$ означает, что оператор $\hat{A}$ является линейным и преобразует произвольный элемент линейного пространства V в линейное пространство W .

Множество всех линейных операторов действующих из линейного пространства V в это же линейное пространство V , будем обозначать $L(V)$. Напомним, что операторы из $L(V)$ принято называть линейными преобразованиями линейного пространства V .

Теорема 1. Множество $L(V, W)$ всех операторов действующих из V в W , с операциями сложения операторов и умножения оператора на скаляр и выбранным нулевым оператором и противоположным оператором образует линейное пространство.



Определение 13. Произведением (композицией) операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ из $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ называется оператор $\widehat{AB}$ действующий на любой вектор $\bar{x} \in \mathbb{V}$ по правилу $(\widehat{AB})\bar{x} = \hat{A}(\hat{B}\bar{x})$.



Замечание 1. Свойство коммутативности, вообще говоря, не выполняется. $\widehat{AB} \neq \widehat{BA}$.



Свойства линейных операторов.

1. Если $\hat{A}$ и $\hat{B} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, то и $\widehat{AB} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.
2. $\alpha(\widehat{AB}) = (\alpha\hat{A})\hat{B}$.
3. $(\hat{A} + \hat{B})\hat{C} = \widehat{AC} + \widehat{BC}$.
4. $\hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \widehat{AB} + \widehat{AC}$.
5. $(\widehat{AB})\hat{C} = \hat{A}(\widehat{BC})$.

Докажем первое свойство. Проверяем выполнение условий 1 и 2 определения линейного оператора.

1. $(\widehat{AB})(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}(\hat{B}(\bar{x} + \bar{y})) = \hat{A}(\hat{B}\bar{x} + \hat{B}\bar{y}) = \hat{A}(\hat{B}\bar{x}) + \hat{A}(\hat{B}\bar{y}) = (\widehat{AB})\bar{x} + (\widehat{AB})\bar{y}$.
2. $(\widehat{AB})(\alpha\bar{x}) = \hat{A}(\hat{B}(\alpha\bar{x})) = \hat{A}(\alpha\hat{B}\bar{x}) = \alpha\hat{A}(\hat{B}\bar{x}) = \alpha(\widehat{AB})\bar{x}$.

Аналогично доказываются свойства 2-5.



Определение 5.15. n -ной степенью $\hat{\mathbf{A}}^n$ оператора $\hat{\mathbf{A}}$ называется произведение n операторов $\hat{\mathbf{A}}$: $\hat{\mathbf{A}}^n = \underbrace{\hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \dots \hat{\mathbf{A}}}_{n \text{ сомножителей}}$.

При этом справедливы формулы: $\hat{\mathbf{A}}^{n+m} = \hat{\mathbf{A}}^n \hat{\mathbf{A}}^m$; $\hat{\mathbf{A}}^{nt} = (\hat{\mathbf{A}}^t)^n$.

Определение 5.16. Линейный оператор $\hat{\mathbf{B}}$ называется обратным (обозначается $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$) для оператора $\hat{\mathbf{A}}$, если $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{E}}$. Иными словами, для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ $\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}$.

Теорема 5.2. (О прообразе нулевого вектора)

Если $\hat{\mathbf{A}}$ имеет обратный, то из $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$ следует, что $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$.

► Из $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$ следует $\hat{\mathbf{A}}^{-1}(\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}$.

А так как $\forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ $\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{0}}$. ►

Определение 5.17. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ действует взаимно однозначно из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$, если он два различных элемента $\bar{\mathbf{x}}_1$ и $\bar{\mathbf{x}}_2$ преобразует в различные элементы $\bar{\mathbf{y}}_1 = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_1$ и $\bar{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}_2$. Иными словами, каждый элемент $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ представляет образ единственного элемента $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$.



Теорема 5.3. (критерий обратимости линейного оператора).
Для того, чтобы линейный оператор $\hat{A} \in L(V)$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы $\hat{A}$ действовал взаимно однозначно из V в V .

Определение 5.18. Оператор, имеющий обратный, называется обратимым.

Примеры

- 1) Тожественный (единичный) оператор $\hat{I}$ имеет обратный, причём $\hat{I}E^{-1} = \hat{E}$.
- 2) Нулевой оператор $\hat{O}$, очевидно, не имеет обратного.
- 3) Всякая квадратная матрица A порядка n определяет линейный оператор $\hat{A}$, действующий в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если матрица A не вырождена, то оператор $\hat{A}$ обратим и он порождается обратной матрицей A^{-1} .



Матрица линейного оператора.

Пусть $\mathbb{V}$ — произвольное n -мерное векторное пространство. Зафиксируем в пространстве $\mathbb{V}$ произвольный базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — произвольный элемент из $\mathbb{V}$. Раскладываем этот вектор в заданном базисе.

$$\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{k=1}^n x_k \bar{\mathbf{e}}_k.$$

Пусть $\hat{\mathbf{A}}$ — линейный оператор из $L(\mathbb{V})$. Применяем оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к элементу $\bar{\mathbf{x}}$, получаем

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = x_1 \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{k=1}^n x_k \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k.$$

Представим образы базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_k$ в виде разложения по этим же базисным векторам

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k = a_{1k} \bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2k} \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nk} \bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{j=1}^n a_{jk} \bar{\mathbf{e}}_j.$$



Матрица линейного оператора.

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k = a_{1k}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2k}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nk}\bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{j=1}^n a_{jk}\bar{\mathbf{e}}_j.$$

Запишем разложение образы базисных векторов в развёрнутом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = a_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n1}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = a_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n2}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_n = a_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2n}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nn}\bar{\mathbf{e}}_n. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Коэффициенты a_{jk} этих разложений образуют квадратную матрицу порядка n , которая называется матрицей оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_E$. Она обозначается обычно той же буквой, что и оператор:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Каждый k -ый столбец этой матрицы состоит из координат вектора $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k$ в базисе $\mathfrak{B}_E$

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = x_1\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{k=1}^n x_k\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k.$$

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{jk}\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}x_k \right) \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^n y_j\bar{\mathbf{e}}_j.$$



$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n a_{jk} \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{j=1}^n y_j \bar{\mathbf{e}}_j.$$

Получили координаты элемента $\bar{y}$, который является образом элемента $\bar{x} \in \mathbb{V}$. $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$. Обозначим координаты вектора $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

[illegible]

Или $Y = AX$.

Дадим более удобное определение матрицы линейного оператора.

Определение 5.19. Пусть $\hat{\mathbf{A}}$ — линейный оператор из $L(\mathbb{V})$. Если $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ — базис n -мерного линейного пространства $\mathbb{V}$ и известно разложение образов этих базисных векторов $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k = \sum_{j=1}^n a_{jk}\bar{\mathbf{e}}_j$, то матрица

$A = (a_{jk})$ называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в заданном базисе $\mathfrak{B}_E$.



Пример 5.5. Линейный оператор $\hat{A}$ трёхмерного пространства с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ задан образами векторов базиса:

$$\hat{A}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3,$$

$$\hat{A}(\bar{e}_2) = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 3\bar{e}_3,$$

$$\hat{A}(\bar{e}_3) = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3.$$

Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ и найти образ вектора $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ вектора $\bar{x} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$.

► Матрица A состоит из столбцов образом базисных векторов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдём образ вектора $\bar{x}$: $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x}), \quad \bar{y} = A\bar{x},$

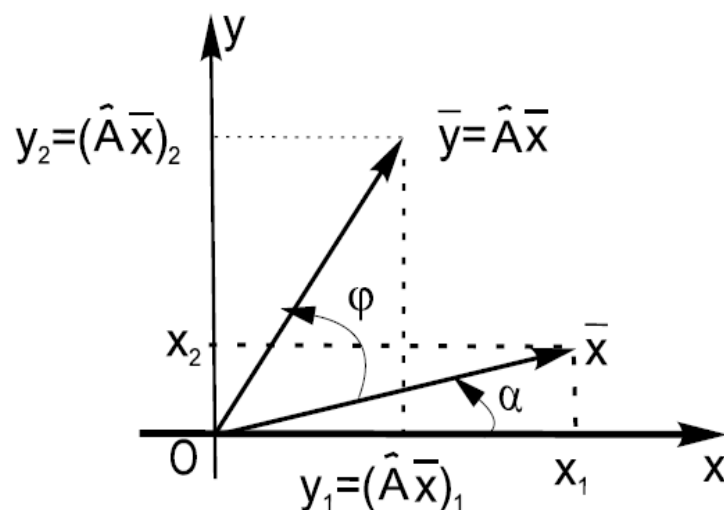
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{y} = \hat{A}(\bar{x}) = -6\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 8\bar{e}_3. \blacktriangleleft$$



Пример 5.6. Найти матрицу оператора поворота векторов плоскости на угол φ против часовой стрелки в декартовом базисе.

► Рассмотрим произвольный вектор $\bar{x} = (x_1, x_2)$, рис. 4. Пусть угол между вектором $\bar{x}$ и осью абсцисс равен α . Оператор поворота $\hat{A}$, преобразует этот вектор в вектор $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$. Найдём координаты $\bar{y} = (y_1, y_2)$ образа вектора $\bar{x}$.



Так как при повороте длина вектора не изменяется, непосредственно из рис. 4, получаем:

$$\begin{aligned} y_1 &= (\hat{A}\bar{x})_1 = |\bar{x}| \cos(\varphi + \alpha) = |\bar{x}|(\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) = \\ &= (|\bar{x}| \cos \alpha) \cos \varphi - (|\bar{x}| \sin \alpha) \sin \varphi = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= (\hat{A}\bar{x})_2 = |\bar{x}| \sin(\varphi + \alpha) = |\bar{x}|(\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) = \\ &= (|\bar{x}| \cos \alpha) \sin \varphi + (|\bar{x}| \sin \alpha) \cos \varphi = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Выпишем полученные соотношения

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos \varphi - x_2 \sin \varphi, \\ y_2 = x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили выражения координат образа вектора $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$ (5.9). Матрицу оператора поворота вектора $\bar{x}$ против часовой стрелки на угол φ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Легко проверить полученный результат. Пусть $x = (1, 0)$ и $\varphi = \pi/2$. Следовательно, матрица оператора равна:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, оператор отобразил орт $\bar{i}$ в орт $\bar{j}$. ◀



Теорема 5.4. (о существовании линейного оператора с заданной матрицей). Пусть в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ задан базис $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $A = (a_{jk})$ — квадратная матрица порядка n . Существует единственный линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$, матрицей которого в данном базисе является матрица A .

Теорема 5. (о ранге матрицы линейного оператора). Ранг линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, равен рангу матрицы A этого оператора: $\text{rang} \hat{\mathbf{A}} = \text{rang} A$.

СЛЕДСТВИЕ: 1. Обратный оператор $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ для оператора $\hat{\mathbf{A}}$ существует тогда, когда ранг матрицы A оператора $\hat{\mathbf{A}}$ равен $n = \dim \mathbb{V}$. В этом случае существует также обратная матрица A^{-1} для матрицы A , которая служит матрицей оператора $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$.



5.5. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть V — произвольное n -мерное векторное пространство и имеются два базиса («старый базис») $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и («новый базис») $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$. $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$. $\mathbf{A}_F$ и $\mathbf{A}_E$ — матрицы оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$. Справедлива следующая теорема устанавливающая связь между матрицами оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в разных базисах.

Теорема 5.5. (о матрице линейного оператора в новом базисе)

Матрицы $\mathbf{A}_E$ и $\mathbf{A}_F$ оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$ соответственно связаны соотношением

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}. \quad (5.9)$$

► Произвольный вектор $\bar{\mathbf{x}} \in V$ может быть разложен по базисам $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$:

$$\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n, \quad \bar{\mathbf{x}}' = x'_1 \bar{\mathbf{f}}_1 + x'_2 \bar{\mathbf{f}}_2 + \dots + x'_n \bar{\mathbf{f}}_n.$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}',$$

где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}'$ — матрица-столбцы рассматриваемых векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{x}}'$. 25



Действие оператора $\hat{\mathbf{A}}$ на вектор $\bar{\mathbf{x}}$ порождает некоторый вектор $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$. Запишем это в матричном виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_E \mathbf{X}, \quad (5.11) \qquad \mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}', \quad (5.10)$$

где $\mathbf{Y}$ — матрица-столбец вектора $\bar{\mathbf{y}}$ в «старом» базисе $\mathfrak{B}_E$.

Разложим вектор $\bar{\mathbf{y}}$ в «новом» базисе $\mathfrak{B}_F$. «Старые» ($\mathbf{Y}$) и «новые» ($\mathbf{Y}'$) координаты вектора $\bar{\mathbf{y}}$ связаны соотношениями (4.4)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{Y}'. \quad (5.12)$$

Подставим теперь (5.10) и (5.11) в (5.12)

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{Y}' = \mathbf{Y} = \mathbf{A}_E \mathbf{X} = \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}'.$$

Умножаем полученное равенство слева на матрицу $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1}$, получим

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}'. \quad (5.13)$$

Так как действие оператора $\hat{\mathbf{A}}$ на вектор $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\mathfrak{B}_F$ определяется формулой

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}_F \mathbf{X}'. \quad (5.14)$$

Сравнивая полученные зависимости (5.13) и (5.14), приходим к формуле $\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}$. ►



$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}. \quad (5.9)$$

СЛЕДСТВИЕ: 5.1. Умножим матричное равенство (5.9) слева на матрицу $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$, а справа на $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{A}_F \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} &= \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \Rightarrow \\ \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{A}_F \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} &= \mathbf{E} \mathbf{A}_E \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{A}_F \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} = \mathbf{A}_E. \end{aligned}$$

Это формула для определения матрицы $\mathbf{A}_E$, если известна матрица $\mathbf{A}_F$.

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{A}_F \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1}. \quad (5.15)$$



Пример 5.7. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ задан в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ матрицей $\mathbf{A}_E$. Найти матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \bar{\mathbf{f}}_3\}$

$$\mathbf{A}_E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_1 &= -2\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \\ \bar{\mathbf{f}}_2 &= \bar{\mathbf{e}}_1 - \bar{\mathbf{e}}_3, \\ \bar{\mathbf{f}}_3 &= -\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2 + \bar{\mathbf{e}}_3. \end{aligned}$$

◀Получаем матрицу перехода $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$ от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$. Для этого в матрицу $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$ записываем по столбцам базисные векторы $\bar{\mathbf{f}}_i$:

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее применяем формулу (5.9) $\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}$.

Найдём обратную матрицу $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1}$. Находим определитель матрицы $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$, обозначим его Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4.$$



$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2; P_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0; P_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$P_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; P_{22} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; P_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3;$$

$$P_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; P_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2; P_{33} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -10 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^{-1} (\mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}) =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}}$$



Пример 5.8. Оператор действующий в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ переводит произвольный элемент $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ в другой элемент имеющий следующие координаты:

а) $\hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3 + 1; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3;$

б) $\hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3;$

в) $\hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$

Проверить, является ли оператор $\mathbf{A}$ линейным. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}; \bar{\mathbf{j}}; \bar{\mathbf{k}}\}.$

◀Напомним определение 5.7 линейного оператора.

Оператор $\hat{\mathbf{A}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ называется **линейным**, если для любых $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{W}$ и любого действительного числа α выполняются равенства:

1. $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}})$ (свойство аддитивности оператора).

2. $\hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}) = \alpha\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}})$ (свойство однородности оператора).



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3 + 1; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

◀а) Проверим выполнение равенств 1 и 2.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) &= \left(2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) + 1; -2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); \right. \\ &\left. (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) \right) = (2x_1 + x_3 + 1; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) + (2y_1 + \\ &y_3; -2y_1 + y_3; y_2 + 2y_3) = \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{y}}) + (1; 0; 0) \neq \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_1(\alpha \bar{\mathbf{x}}) &= \left(2(\alpha x_1) + (\alpha x_3) + 1; (-2(\alpha x_1) + (\alpha x_3); (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) \right) = \\ &= \alpha \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) + (1; 0; 0) \neq \alpha \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Свойство аддитивности и однородности не выполняются. Следовательно оператор $\hat{\mathbf{A}}_1$ не является линейным.



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3 + 1; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

Второй способ.

Используем свойство линейного оператора 5.2 $\hat{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{0}}$.

$$\hat{\mathbf{A}}_1(0, 0, 0) = (2 \cdot 0 + 0 + 1; -2 \cdot 0 + 0; 0 + 2 \cdot 0) = (1, \bar{0}, 0) \neq \bar{0}.$$

Оператор $\hat{\mathbf{A}}_1$ не переводит нулевой вектор в нулевой, следовательно он не является линейным. ►



$$\blacktriangleleft 6) \hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Свойство 5.2 для данного оператора выполняется. Проверим выполнение равенств 1 и 2.

$$\hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = \left(2(x_1 + y_1)(x_3 + y_3); -2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) \right).$$

Рассмотрим действие оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$ на первую координату вектора $\hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})$.

$$2(x_1 + y_1)(x_3 + y_3) = \underline{2x_1x_3} + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + \underline{2y_1y_3} = \underline{2x_1x_3} + \underline{2y_1y_3} + (2x_1y_3 + 2x_3y_1).$$

Если бы данный оператор был линейным, то он бы сумму перевёл бы только в подчёркнутые слагаемые. Таким образом, свойство аддитивности не выполняются, следовательно оператор $\hat{\mathbf{A}}_2$ не является линейным.



Замечание 5.3. Если оператор f переводит линейную комбинацию некоторых элементов в нелинейную, то этот оператор линейным быть не может.

Например, операторы $f_1 : x \rightarrow x^2$ или $f_2 : x \rightarrow \sqrt{x}$ или $f_3 : \bar{X} = (x_1; x_2) \rightarrow \bar{y} = (x_1^2; x_2^2)$ и т.д., являются нелинейными операторами.

Замечание 5.4. Проверку оператора на линейность, следует начать с проверки перевода нулевого вектора в нулевой, затем проверить переводит ли оператор линейные компоненты в линейные, а потом уже проверять свойства 1 и 2 из определения линейного оператора 5.2.



$$\blacktriangleleft \text{в) } \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Свойство 5.2 для данного оператора выполняется. Проверим выполнение равенств 1 и 2.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) &= \left(2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); -2(x_1 + y_1) + (x_3 + y_3); \right. \\ &\quad \left. (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) \right) = (2x_1 + x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) + \\ &\quad + (2y_1 + y_3; -2y_1 + y_3; y_2 + 2y_3) = \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{y}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_3(\alpha \bar{\mathbf{x}}) &= \left(2(\alpha x_1) + (\alpha x_3); (-2(\alpha x_1) + (\alpha x_3); (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) \right) = \\ &= \alpha \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Свойство аддитивности и однородности выполняются. Следовательно оператор $\hat{\mathbf{A}}_3$ является линейным.



$$в) \hat{\mathbf{A}}_3(\bar{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_3; -2x_1 + x_3; x_2 + 2x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Найдём матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_3$ в базисе $\mathfrak{B}_I = \left\{ \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} = (1; 0, 0), \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1, 0), \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{k}} = (0; 0, 1) \right\}.$

Согласно определения 5.19, матрица линейного оператора состоит из столбцов образов базисных векторов. Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к базисным векторам:

$$\hat{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{e}}_1 = (2; -2; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{e}}_2 = (0; 0; 1), \quad \hat{\mathbf{A}}_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = (1; 1; 2).$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$

$$\mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поставленная задача решена полностью. ►►



Примеры матриц линейных операторов

1. Нулевой оператор $\widehat{\mathbf{O}}: L \rightarrow L, \dim L = n$

$$\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0),$$

.....

$$\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



Примеры матриц линейных операторов

2. Тожественный оператор $\hat{I}: L \rightarrow L$, $\dim L = n$

$$\hat{I}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\hat{I}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\hat{I}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$



Примеры матриц линейных операторов

3. Оператор $\hat{A}: V_3 \rightarrow V_3$ - гомотетия с коэффициентом k , $\dim V_3 = 3$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = k\vec{e}_1 = (k, 0, 0),$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = k\vec{e}_2 = (0, k, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = k\vec{e}_3 = (0, 0, k)$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$



Примеры матриц линейных операторов

4. Оператор $\hat{A}: P_2 \rightarrow P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0, 0, 0)$$

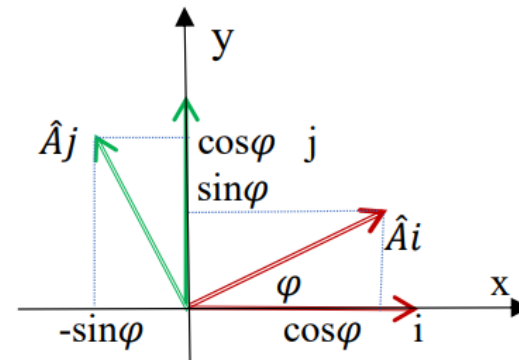
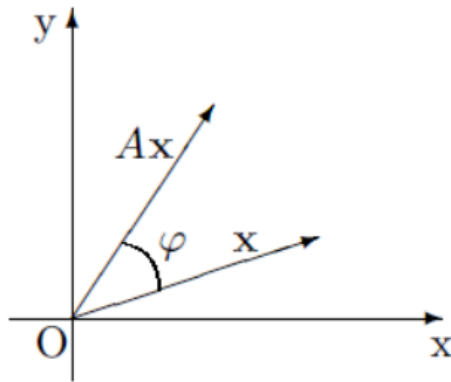
$$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1, 0, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0, 2, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Пример. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}: V_2 \rightarrow V_2$ поворот на угол φ против часовой стрелки и образ вектора $\vec{x} = (1; -1)$ при повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



$$\hat{A}\vec{i} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad \text{При } \varphi = \frac{\pi}{4}, A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

Координаты образа вектора $\vec{x} = (1; -1)$ найдем по формуле $Y = AX$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \hat{A}\vec{x} = (\sqrt{2}; 0)$$



Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич