

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 6

Образ и ядро линейного оператора

Матрица обратного оператора и критерий её существования.

Ядро и образ линейного оператора, их свойства.

Критерий обратимости линейного оператора в терминах его образа и ядра.

Берков Николай Андреевич

18 марта 2023г

Определение линейного оператора и его свойства

Определение 5.6. Пусть V и W — линейные пространства размерностей n и m соответственно. **Оператором** действующим из V в W , называется отображение $\hat{A} : V \rightarrow W$, сопоставляющее каждому вектору $\bar{x}$ пространства V некоторый вектор $\bar{y}$ пространства W . При этом будем использовать обозначение $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x})$ или $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$.

Вектор $\bar{y} = \hat{A}(\bar{x}) \in W$ называется **образом элемента $\bar{x}$** , а вектор $\bar{x} \in V$ — **прообразом элемента $\bar{y}$** .

В данном курсе мы будем рассматривать не произвольные операторы, а только те из них, которые являются линейными операторами.

Определение 5.7. Оператор $\hat{A} : V \rightarrow W$ называется **линейным**, если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$ и любого действительного числа α выполняются равенства:

1. $\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}(\bar{x}) + \hat{A}(\bar{y})$ (свойство аддитивности оператора).
2. $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\hat{A}(\bar{x})$ (свойство однородности оператора).



Матрица линейного оператора.

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_k = a_{1k}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2k}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nk}\bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{j=1}^n a_{jk}\bar{\mathbf{e}}_j.$$

Запишем разложение образы базисных векторов в развёрнутом виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = a_{11}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{21}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n1}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = a_{12}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{22}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{n2}\bar{\mathbf{e}}_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_n = a_{1n}\bar{\mathbf{e}}_1 + a_{2n}\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + a_{nn}\bar{\mathbf{e}}_n. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Коэффициенты a_{jk} этих разложений образуют квадратную матрицу порядка n , которая называется матрицей оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_E$. Она обозначается обычно той же буквой, что и оператор:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Примеры матриц линейных операторов

1. Нулевой оператор $\widehat{\mathbf{O}}: L \rightarrow L, \dim L = n$

$$\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0),$$

.....

$$\widehat{\mathbf{O}}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



Примеры матриц линейных операторов

2. Тожественный оператор $\hat{I}: L \rightarrow L$, $\dim L = n$

$$\hat{I}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\hat{I}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\hat{I}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$



Примеры матриц линейных операторов

3. Оператор $\hat{A}: V_3 \rightarrow V_3$ - гомотетия с коэффициентом k , $\dim V_3 = 3$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = k\vec{e}_1 = (k, 0, 0),$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = k\vec{e}_2 = (0, k, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = k\vec{e}_3 = (0, 0, k)$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$



Примеры матриц линейных операторов

4. Оператор $\hat{A}: P_2 \rightarrow P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0, 0, 0)$$

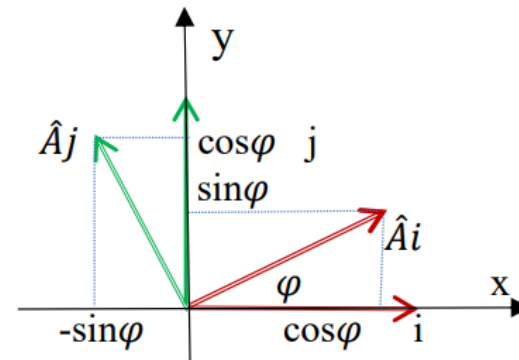
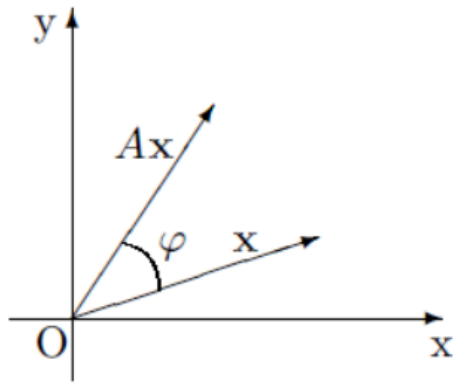
$$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1, 0, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0, 2, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Пример. Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}: V_2 \rightarrow V_2$ поворот на угол φ против часовой стрелки и образ вектора $\vec{x} = (1; -1)$ при повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



$$\hat{A}\vec{i} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad \text{При } \varphi = \frac{\pi}{4}, A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix};$$

Координаты образа вектора $\vec{x} = (1; -1)$ найдем по формуле $Y = AX$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \hat{A}\vec{x} = (\sqrt{2}; 0)$$



Образ и ядро линейного оператора

В данной лекции рассмотрим линейный оператор $\hat{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Как доказано выше это множество образует линейное пространство $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Определение 6.1. Образом $Im \hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}$ называется множество всех векторов $\bar{y} \in \mathbb{V}$, представимых в виде $\bar{y} = \hat{A}\bar{x}$.

$$Im \hat{A} = \left\{ \bar{y} \mid \bar{y} = \hat{A}\bar{x}, \forall \bar{x} \in \mathbb{V} \right\}. \quad (6.1)$$

Определение 6.2. Ядром $Ker \hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}$ называется множество тех векторов $\bar{x} \in \mathbb{V}$, для которых $\hat{A}\bar{x} = \{ \bar{0} \}$.

$$Ker \hat{A} = \left\{ \bar{x} \mid \hat{A}\bar{x} = \{ \bar{0} \}, \bar{x} \in \mathbb{V} \right\}. \quad (6.2)$$

Определение 6.3. Рангом $rang \hat{A}$ линейного оператора $\hat{A} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ называется размерность образа оператора $\hat{A}$, т.е. $rang \hat{A} = dim(Im \hat{A})$



Определение 6.4. Дефектом $\text{Defect } \hat{A}$ линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность ядра оператора: $\text{Defect } \hat{A} = \dim(\text{Ker } \hat{A})$.

Замечание 6.1. Ранг и дефект линейного оператора не зависят от выбора базиса.

Теорема 6.1. (о ранге матрицы линейного оператора).

Ранг линейного оператора $\hat{A}$, равен рангу матрицы A этого оператора: $\text{rang } \hat{A} = \text{rang } A$.

Замечание 6.2. Если $\text{Ker } \hat{A} = \{\bar{0}\}$, то $\text{Im } \hat{A} = \mathbb{V}$ и наоборот.

Теорема 6.2. (о ранге матрицы линейного оператора).

Ранг линейного оператора $\hat{A}$, равен рангу матрицы A этого оператора: $\text{rang } \hat{A} = \text{rang } A$.

СЛЕДСТВИЕ: 6.1. Обратный оператор $\hat{A}^{-1}$ для оператора $\hat{A}$ существует тогда, когда ранг матрицы A оператора $\hat{A}$ равен $n = \dim \mathbb{V}$.

В этом случае существует также обратная матрица A^{-1} для матрицы A , которая служит матрицей оператора $\hat{A}^{-1}$.



Теорема 6.3. (критерий обратимости линейного оператора).
Для того чтобы линейный оператор $\hat{A}$ из $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ имел обратный, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{Ker } \hat{A} = \{ \bar{0} \}. \quad (6.3)$$

◀ Пусть оператор $\hat{A}$ имеет обратный. Тогда из условия $\hat{A}\bar{x} = \bar{0}$, следует, что $\bar{x} = \bar{0}$, то есть $\text{Ker } \hat{A} = \{ \bar{0} \}$.

Обратно, пусть $\text{Ker } \hat{A} = \{ \bar{0} \}$ и $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$. $\bar{y}_1 = \hat{A}\bar{x}_1$, $\bar{y}_2 = \hat{A}\bar{x}_2$.

Тогда $\hat{A}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \hat{A}\bar{x}_1 - \hat{A}\bar{x}_2 = \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \neq 0$. Следовательно, $\bar{y}_1 \neq \bar{y}_2$.

Таким образом, оператор $\hat{A}$ действует взаимно однозначно из $\mathbb{V}$ в $\mathbb{V}$ и, следовательно, имеет обратный. ►

Замечание 6.4. Теорему о критерии обратимости линейного оператора можно сформулировать так:

Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве $\mathbb{V}$, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством $\mathbb{V}$: $\text{Im } \hat{A} = \mathbb{V}$.



Отметим, что множества $\text{Im } \hat{A}$ и $\text{Ker } \hat{A}$ непусты. Более того, докажем теорему.

Теорема 6.4. *Образ и ядро линейного оператора $\hat{A}$, действующего в пространстве V , являются подпространствами пространства V .*

◀1) Пусть $\bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \text{Im } \hat{A}$. Следовательно, существуют прообразы этих элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V$, такие, что $\hat{A}\bar{x}_1 = \bar{y}_1$, $\hat{A}\bar{x}_2 = \bar{y}_2$.

Найдём прообраз линейной комбинации $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2$.

$$\hat{A}(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2) = \alpha_1\hat{A}\bar{x}_1 + \alpha_2\hat{A}\bar{x}_2 = \alpha_1\bar{y}_1 + \alpha_2\bar{y}_2 \in \text{Im } \hat{A}.$$

Следовательно, $\text{Im } \hat{A}$ является подпространством пространства V .

2) Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \text{Ker } A$. Это означает, что $\hat{A}\bar{x}_1 = \hat{A}\bar{x}_2 = \bar{0}$.
$$\hat{A}(\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2) = \alpha_1\hat{A}\bar{x}_1 + \alpha_2\hat{A}\bar{x}_2 = \bar{0}.$$

Поэтому $\text{Ker } \hat{A}$ — подпространство в V . ►



Теорема 6.5. (о размерностях ядра и образа оператора).

Пусть $\hat{\mathbf{A}}$ — линейный оператор $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и $\dim \mathbb{V} = n$. Тогда сумма размерностей образа и ядра оператора $\hat{\mathbf{A}}$ равна размерности пространства $\mathbb{V}$.

$$\dim(\text{Im } \hat{\mathbf{A}}) + \dim(\text{Ker } \hat{\mathbf{A}}) = n. \quad (6.4)$$

◀ В пространстве $\mathbb{V}$ зафиксируем произвольный базис $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в этом базисе и $\text{rang } \mathbf{A} = r$. Рассмотрим произвольный вектор $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$. Разложим этот вектор по базису $\mathfrak{B}$

$$\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n.$$

Тогда

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{A}}(x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n) = x_1 \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_1) + x_2 \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_2) + \dots + x_n \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_n).$$

Так как образ пространства $\mathbb{V}$ состоит из множества всевозможных векторов $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$, следовательно система векторов $\{\bar{\mathbf{y}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_1), \bar{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_2), \dots, \bar{\mathbf{y}}_n = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{e}}_n)\}$ является системой образующей этого пространства. Следовательно, размерность $\text{Im } \hat{\mathbf{A}}$ совпадает с размерностью порождённого набором векторов $\{\bar{\mathbf{y}}_1, \bar{\mathbf{y}}_2, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n\}$. Эти вектора являются образами базисных векторов пространства $\mathbb{V}$, следовательно, матрица линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ состоит из столбцов этих векторов. Мы получили, что $\dim(\text{Im } \hat{\mathbf{A}}) = \text{rang } \hat{\mathbf{A}} = r$.



Далее найдём ранг ядра оператора $\hat{A}$. Возьмём произвольный вектор $\bar{x} \in \mathbb{V}$. Пусть $\mathbf{X}$ — столбец координат этого вектора в базе $\mathfrak{B}$. Рассмотрим множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{X} = \bar{0}$. Множество всех векторов $\bar{x}$, являющихся решениями этой системы, образуют ядро оператора $\hat{A}$. Таким образом, пространство $Ker \hat{A}$ совпадает с пространством решений однородной системы уравнений $A\mathbf{X} = \bar{0}$. Следовательно, $\dim Ker \hat{A} = n - r$.

Суммируя размерности образа и ядра оператора $\hat{A}$, получаем $\dim Im \hat{A} + \dim Ker \hat{A} = r + (n - r) = n$. ►

СЛЕДСТВИЕ: 6.2. Если $Ker \hat{A} = \{ \bar{0} \}$, то $Im \hat{A} = \mathbb{V}$ и наоборот.

СЛЕДСТВИЕ: 6.3. (Из теоремы 6.5). Для того чтобы оператор $\hat{A}$ из $L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ имел обратный оператор $\hat{A}^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $rang \hat{A} = dim \mathbb{V} = n$.



Пример 6.1. Оператор действующий в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ переводит произвольный элемент $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$, заданный в каноническом базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$, в другой элемент того же пространства $\mathbb{R}^3$, имеющий следующие координаты:

а) $\hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3$;

б) $\hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3; x_1 - 2x_2 - 2x_3; 2x_1 - x_2 - 4x_3) \in \mathbb{R}^3$.

1) Найти матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$.

2) Проверить обратимость оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

3) Если он обратим, то найти матрицу обратного оператора $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$ и записать формулу для обратного преобразования.

4) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3; 2)$.

5) Найти прообраз векторов $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ и $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$.

6) Найти ядро оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

◀ Легко показать, что оба преобразования являются линейными. Т.к. для произвольных $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, выполняются оба условия линейности операторов: $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}}$ и $\hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}) = \alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}$, см. решение примера 5.8.



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

◀а) 1) Получим матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_1$ в базисе $\mathfrak{B}_I$:

$$\mathfrak{B}_I = \left\{ \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} = (1; 0, 0), e_2 = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1, 0), e_3 = \bar{\mathbf{k}} = (0; 0, 1) \right\}.$$

Согласно определения 5.19, матрица линейного оператора состоит из столбцов образов базисных векторов.

Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к базисным векторам:

$$\hat{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 1; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 = (2; -2; 2), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{e}}_3 = (3; 0; -1).$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_1$ в базисе $\mathfrak{B}_I$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 2; A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 8; A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4.$$



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Найдём образ произвольного вектора $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{R}^3$ линейного линейного преобразования $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$.

$$\mathbf{A}_1^{-1}X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$$

Запишем теперь формулу для обратного преобразования $\hat{\mathbf{A}}_1^{-1}(\bar{\mathbf{x}})$.

$$\hat{\mathbf{A}}_1^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = 0,1(2x_1 + 8x_2 + 6x_3; x_1 - x_2 + 3x_3; 2x_1 - 2x_2 - 4x_3) \in \mathbb{R}^3.$$



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3; 2)$ по формуле $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}}$ или $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы-столбцы векторов $\bar{\mathbf{y}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, соответственно.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3; 2)$ равен $\bar{\mathbf{y}} = (11; -7; 4)$.



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

5) Найти прообраз векторов $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ и $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$.

По формуле $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{d}}$ или $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}$, где $\mathbf{X}$ и $\mathbf{D}$ — матрицы-столбцы векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{d}}$, соответственно.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ: прообраз вектора $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ равен $\bar{\mathbf{x}} = (2; -6; 4)$.

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29/5 \\ -2/5 \\ 16/5 \end{pmatrix}.$$

Прообраз вектора $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$ равен $\bar{\mathbf{x}}_1 = \left(-\frac{29}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$.



$$a) \hat{\mathbf{A}}_1(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_1 - 2x_2; 2x_2 - x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

6) Найти ядро оператора $\hat{\mathbf{A}}$. Согласно определению 6.2, ядром $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}}$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ называется множество тех векторов $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$, для которых $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Так как определитель матрицы $\mathbf{A}_1$ не равен нулю, следовательно система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ имеет единственное решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = \{(0; 0; 0)\}$. ►



◀ Решаем теперь задачу для оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$.

$$\text{б) } \hat{\mathbf{A}}_2(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3; x_1 - 2x_2 - 2x_3; 2x_1 - x_2 - 4x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Как и для оператора $\hat{\mathbf{A}}_1$, легко показать, что это преобразование являются линейным. Т.к. для произвольных $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, выполняются оба условия линейности операторов:

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}} \text{ и } \hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}) = \alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}.$$

Получим матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$ в базисе $\mathfrak{B}_I$:

$$\mathfrak{B}_I = \left\{ \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} = (1; 0, 0), \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1, 0), \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{k}} = (0; 0, 1) \right\}.$$

Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к базисным векторам $\mathfrak{B}_I$:

$$\hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 1; 2), \quad \hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_2 = (2; -2; -1), \quad \hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_3 = (-2; -2; -4).$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$ в базисе $\mathfrak{B}_I$.

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Определитель матрицы $\mathbf{A}_2$ равен нулю, так как первый и третий столбцы зависимы, второй столбец равен первому умноженному на -2 . Следовательно, оператор не обратим и пункт 3) пропускаем.



$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3; 2)$ по формуле $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{c}}$ или $\mathbf{Y} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{C}$, где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы-столбцы векторов $\bar{\mathbf{y}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, соответственно.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Ответ: образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3; 2)$ равен $\bar{\mathbf{y}} = \underline{(1; -11; -13)}$.



5) Найти прообраз векторов $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ и $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$.

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -14 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

При помощи эквивалентных преобразований приводим расширенную матрицу системы к более простому виду. Из второй строки вычтем первую и из третьей строки вычтем первую умноженную на 2. Затем вторую разделим на -4 , а третью на -5 , одну из одинаковых строк удаляем и из первой строки вычтем вторую умноженную на 2. В результате получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 22 \\ 1 & -2 & -2 & -14 \\ 2 & -1 & -4 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 22 \\ 0 & -4 & 0 & 36 \\ 0 & -5 & 0 & -36 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 7,2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 16,2 \end{array} \right).$$

Получили $\text{rang } \mathbf{A}_2 = 2, \text{rang } (\mathbf{A}_2 | \mathbf{D}) = 3$.

Система несовместна, следовательно прообраза для вектора $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ не существует.



Найти прообраз векторов $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$. Выполняем те же преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -4 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Получили $\text{rang } \mathbf{A}_2 = 2$, $\text{rang } (\mathbf{A}_2 | \mathbf{D}) = 2$.

Система совместна, но неопределённая, следовательно прообразом для вектора $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ является линейное одномерное множество.

Запишем упрощённую систему линейных неоднородных уравнений в стандартном виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 , а в качестве свободной — x_3 .

Придаём свободной неизвестной x_3 произвольные значения $c \in \mathbb{R}$, получаем общее решение неоднородной системы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ответ: вектор $\bar{\mathbf{d}} = (22; -14; 8)$ не имеет прообраза, прообразом вектора $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$ является одномерное множество векторов $\{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\mathbf{x}} = c(2; 0; 1) + (-1; 2; 0), \bar{c} \in \mathbb{R}\}$, т.е. все эти вектора переводятся линейным оператором в один вектор $\bar{\mathbf{f}} = (3; -5; -4)$.



6) Найти ядро оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$. Согласно определению 6.2 ядром $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}}$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ называется множество тех векторов $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$, для которых $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Так как определитель матрицы $\mathbf{A}_2$ равен нулю, следовательно система уравнений $\mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное множество решений.

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ранг матрицы равен 2.}$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 , а в качестве свободной — x_3 .

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(2c, 0, c)\}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Проверим полученное решение

Таким образом, ядром оператора $\hat{\mathbf{A}}_2$ является одномерное линейное подпространство векторов $\mathbf{L} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\mathbf{x}} = (2c; 0; c), c \in \mathbb{R}\}$.

Ответ: $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\mathbf{x}} = (2c; 0; c), c \in \mathbb{R}\}$.



Пример 6.2. Заданы два линейных оператора $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ действующие в линейном пространстве $\mathbb{R}^2$, отображающие вектор $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2)$ в и другой вектор $\bar{\mathbf{y}} = (y_1; y_2)$ по правилу: $\hat{\mathbf{A}}(x) = (2x_1 + 3x_2; x_1 - x_2)$, $\hat{\mathbf{B}}(x) = (x_1 - 2x_2; 2x_1 + x_2)$. Найдти линейный оператор: а) $\hat{\mathbf{C}}_1 = \widehat{\mathbf{AB}}$; б) $\hat{\mathbf{C}}_2 = \widehat{\mathbf{BA}}$; в) $\hat{\mathbf{C}}_3 = \widehat{\mathbf{AB}} - \widehat{\mathbf{BA}}$.

◀Выпишем матрицы линейных операторов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём их произведения

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдены матрицы $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ и $\mathbf{C}_3$ линейных операторов $\hat{\mathbf{C}}_1, \hat{\mathbf{C}}_2$ и $\hat{\mathbf{C}}_3$, соответственно.

Запишем теперь правила по которым данные операторы переводят получают образ вектор $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$:

$$\hat{\mathbf{C}}_1 \bar{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{AB}} \bar{\mathbf{x}} = (8x_1 - x_2; -x_1 - 3x_2); \quad \hat{\mathbf{C}}_2 \bar{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{BA}} \bar{\mathbf{x}} = (5x_2; 5x_1 + 5x_2);$$

$$\hat{\mathbf{C}}_3 \bar{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{AB}} \bar{\mathbf{x}} - \widehat{\mathbf{BA}} \bar{\mathbf{x}} = (8x_1 - 6x_2; -6x_1 - 8x_2).$$

Отметим, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не коммутативные. ►



Пример 6.3. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ заданный в пространстве $\mathbb{V}_2$ проектирует вектор $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2)$ на ось Ox , рис.5

а) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\}$.

б) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (-2; -2)$.

в) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

г) Является ли оператор обратимым? Найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{i}}$.

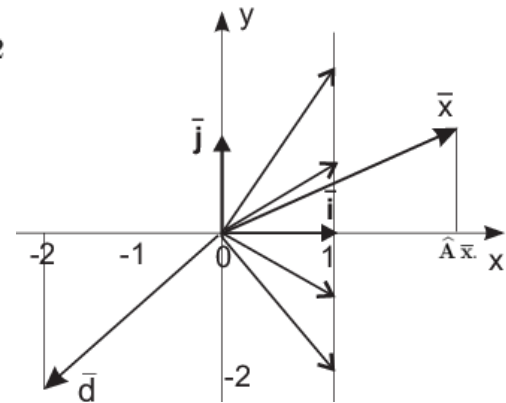


Рис. 5. К примеру 6.3

◀Применим заданный оператор к базисным векторам $\mathfrak{B}_I$.

$$\hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{i}} = (1; 0), \quad \hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{j}} = (0; 0).$$

а) Выпишем матрицу $\mathbf{A}$ соответствующую данному оператору $\hat{\mathbf{A}}$.

Для этого в столбцы матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ записываем образы базисных векторов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (-2; -2)$:

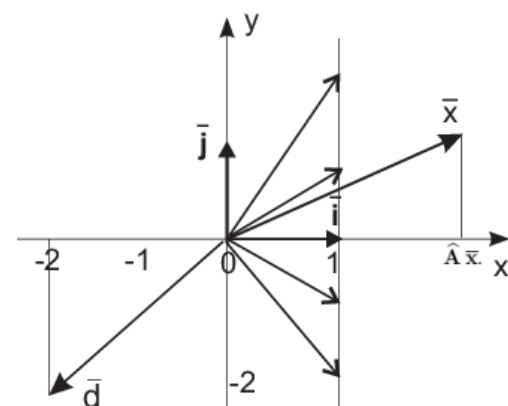
$$\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{x}}. \quad \mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили: оператор $\hat{\mathbf{A}}$ отображает вектор $\bar{\mathbf{d}} = (-2; -2)$ в вектор $\bar{\mathbf{y}} = (-2; 0)$. Это наглядно видно из рис. 5.

$$\hat{\mathbf{A}}(-2; -2) = (-2; 0).$$

в) Найдём ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Из геометрических соображений видно, что все векторы коллинеарные базисному вектору $\bar{\mathbf{j}} = (0; 1)$ проектируются в нулевой вектор $\bar{\mathbf{0}} = (0; 0)$. Следовательно,



$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{ \bar{\mathbf{x}} \mid \bar{\mathbf{x}} = (0; c), c \in \mathbb{R} \}, \quad \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{V}_1, \quad \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 1, \quad \text{rang } \hat{\mathbf{A}} = 1.$$

г) Является ли оператор обратимым? Найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{i}}$.

По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det \mathbf{A} = 0$; 2) $\text{Im } \hat{\mathbf{A}} \neq \mathbb{V}_2$; 3) $\ker \hat{\mathbf{A}} \neq \{ \bar{\mathbf{0}} \}$.

Осталось найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{i}}$. Для этого решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ)

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы равен 1, следовательно существует бесконечное одномерное многообразие решений данной НСЛАУ: $x_1 = 1, x_2 = c, c \in \mathbb{R}$.

Прообразом вектора $\bar{\mathbf{i}} = (1; 0)$ является множество векторов из $\mathbb{V}_2$ в которых первая координата равна 1, а вторая произвольное действительное число, т.е. множество $\{ \bar{\mathbf{x}} \mid \bar{\mathbf{x}} = (1; c), c \in \mathbb{R} \}$. Это видно и из геометрических соображений, рис. 6 ►



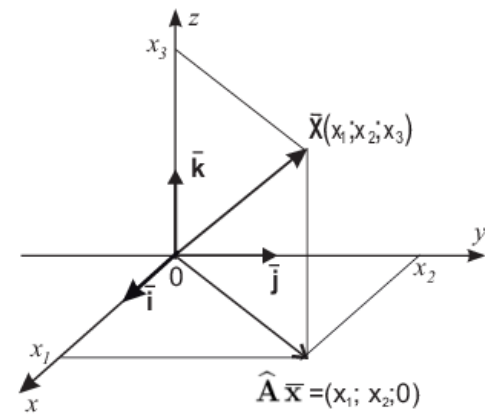
Пример 6.4. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ заданный в пространстве $\mathbb{V}_3$ проектирует вектор $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_1; x_3)$ на плоскость Oxy , рис. 6.

а) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

б) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (1; 2; 3)$.

в) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

г) Является ли оператор обратимым? Найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{y}} = (1; 1; 0)$.



◀ Применим заданный оператор к базисным векторам $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{i}} = (1; 0; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{j}} = (0; 1; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{k}} = (0; 0; 0).$$

а) Выпишем матрицу $\mathbf{A}$ соответствующую данному оператору $\hat{\mathbf{A}}$. Для этого в столбцы матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ записываем образы базисных векторов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (1; 2; 3)$:

$$\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}. \quad \mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили: оператор $\hat{\mathbf{A}}$ отображает вектор $\bar{\mathbf{d}} = (1; 2; 0)$ в вектор $\bar{\mathbf{y}} = (1; 2; 0)$. Это наглядно видно из рис. 6.

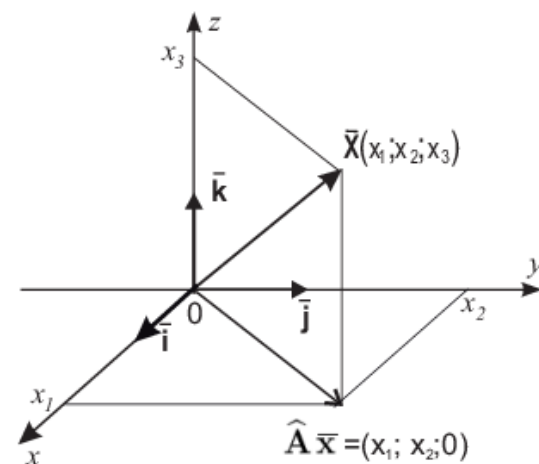
$$\hat{\mathbf{A}}(-2; -2) = (1; 2; 0).$$



в) Найдём ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Из геометрических соображений видно, что все векторы коллинеарные базисному вектору $\bar{\mathbf{k}} = (0; 0; 1)$ проектируются в нулевой вектор $\bar{\mathbf{0}} = (0; 0)$.

Следовательно,



$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{ \bar{\mathbf{x}} \mid \bar{\mathbf{x}} = (0; 0; c), c \in \mathbb{R} \}, \quad \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{V}_2, \quad \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 1, \quad \text{rang } \hat{\mathbf{A}} = 2.$$

г) Является ли оператор обратимым?

Найти прообраз вектора $\bar{y} = (1; 1; 0)$.

По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det \mathbf{A} = 0$; 2) $\text{Im } \hat{\mathbf{A}} \neq \mathbb{V}_3$; 3) $\ker \hat{\mathbf{A}} \neq \{\mathbf{0}\}$.

Осталось найти прообраз вектора $\bar{y} = (1; 1; 0)$.

Для этого решаем однородную систему линейных алгебраических уравнений (НСЛАУ)

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг системы равен 2, а количество неизвестных 3, следовательно существует бесконечное одномерное многообразие решений данной НСЛАУ.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = c, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Прообразом вектора $\bar{y} = (1; 1; 0)$ является множество векторов: $\{\bar{x} \mid \bar{x} = (1; 1; c), c \in \mathbb{R}\}$, т.е. множество векторов из $\mathbb{V}_3$ в которых первая и вторая координаты равны 1, а третья произвольное действительное число. Это видно и из геометрических соображений, рис. 6.

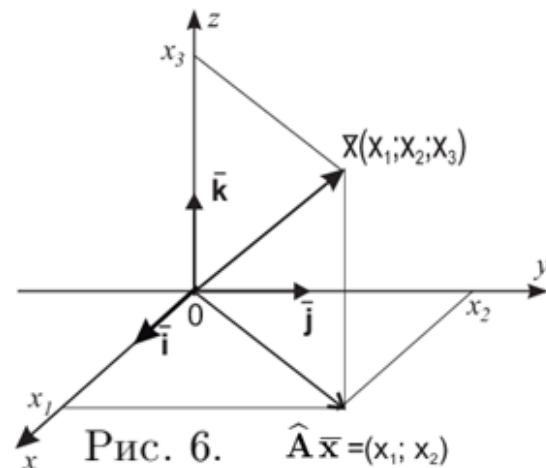


Рис. 6. $\hat{\mathbf{A}}\bar{x} = (x_1; x_2)$



Пример 6.5. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ заданный в пространстве $\mathbb{V}_3$ зеркально отображает вектор $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{V}_3$ относительно плоскости Oxy , рис. 7.

Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

◀Докажем линейность этого оператора.

Пусть $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{V}_3$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3).$$

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; -x_3); \quad \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}}) = (y_1; y_2; -y_3),$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) &= (x_1 + y_1; x_2 + y_2; -(x_3 + y_3)) = \\ &= (x_1; x_2; -x_3) + (y_1; y_2; -y_3) = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Найдём образы базисных векторов.

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{i}} = (1; 0; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{k}} = -\bar{\mathbf{k}} = (0; 0; -1).$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$:

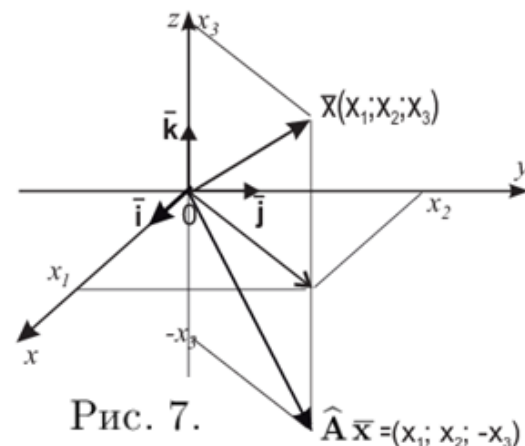
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Особенность данного оператора состоит в том, что двойное применения преобразования эквивалентно тождественному оператору, т.е.

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}.$$

Так как матрица оператора обратима, следовательно

$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}, \quad \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{V}_3, \quad \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 0.$$



Пример 6.6. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ заданный в пространстве $\mathbb{V}_3$ поворачивает все векторы $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3) \in \mathbb{V}_3$, заданный в базисе $\mathfrak{B}_I\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ по против часовой стрелки вокруг оси Oz на α , рис. 8.

а) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}(\alpha)$ в базисе $\mathfrak{B}_I$. Является ли оператор $\hat{\mathbf{A}}$ обратимым? Если да, описать действие оператора $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$.

б) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (1; 2; 3)$ преобразования $\hat{\mathbf{A}}(\pi/2)$ и $\hat{\mathbf{A}}(\pi)$.

в) Найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{g}} = (1; 2; 3)$ преобразования $\hat{\mathbf{A}}(\pi/2)$ и $\hat{\mathbf{A}}(\pi)$.

«а) Рассмотрим куда отображает базисные вектора $\bar{\mathbf{i}}; \bar{\mathbf{j}}; \bar{\mathbf{k}}$ линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$. Для наглядности, на рис. 8 б), представлен вид преобразования с неподвижной оси Oz .

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \alpha \bar{\mathbf{i}} + \sin \alpha \bar{\mathbf{j}}; \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \alpha \bar{\mathbf{i}} + \cos \alpha \bar{\mathbf{j}}; \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{k}}.$$

Выпишем матрицу данного преобразования

Определитель матрицы $\mathbf{A} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, следовательно существует обратный линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$. Найдём матрицу этого оператора. Очевидно, что обратным оператором к оператору поворота против часовой стрелки на угол α вокруг оси Oz , будет оператор $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ поворота по часовой стрелке на угол α вокруг оси Oz , т.е. на угол $-\alpha$ против часовой стрелки. Следовательно,

$$\mathbf{A}^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

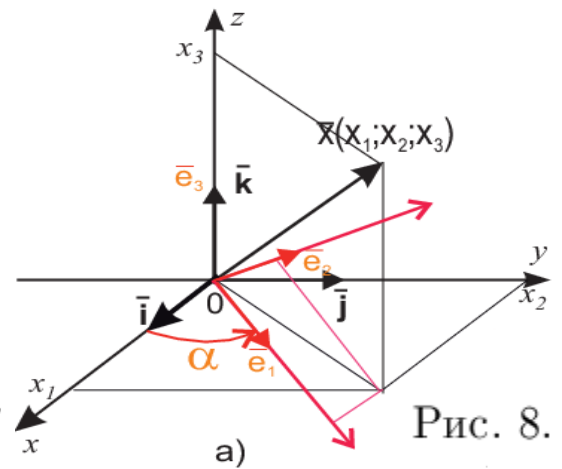
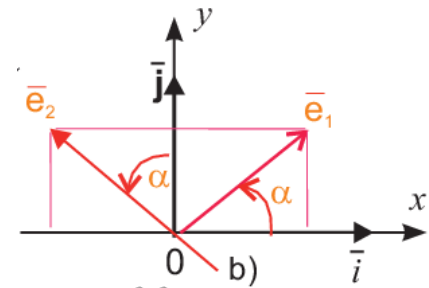
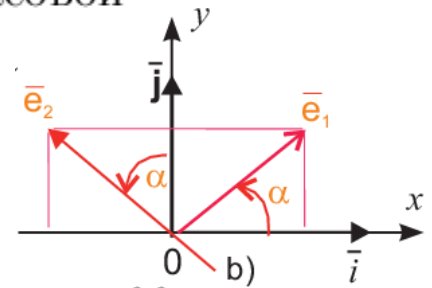


Рис. 8.



Отметим, что при $\alpha = \pi/2$ (поворот на угол 90° против часовой стрелки) матрица преобразования будет равна

$$\mathbf{A}|_{\alpha=\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Найдём координаты образов базисных векторов $\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{e}}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Орт $\bar{\mathbf{i}}$ перешёл в $-\bar{\mathbf{j}}$, орт $\bar{\mathbf{j}}$ — в $\bar{\mathbf{i}}$, а орт $\bar{\mathbf{k}}$ остался на месте.

При $\alpha = \pi$ поворот на угол 180° матрица преобразования будет равна

$$\mathbf{A}|_{\alpha=\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При таком преобразовании: орты $\bar{\mathbf{i}}$ и $\bar{\mathbf{j}}$ изменили направление, а орт $\bar{\mathbf{k}}$ опять остался на месте.



б) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{d}} = (1; 2; 3)$ преобразования $\hat{\mathbf{A}}(\pi/2)$ и $\hat{\mathbf{A}}(\pi)$.

$$\mathbf{A}|_{\alpha=\pi/2} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}|_{\alpha=\pi} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

в) Найти прообраз вектора $\bar{\mathbf{g}} = (1; 2; 3)$ преобразования $\hat{\mathbf{A}}(\pi/2)$ и $\hat{\mathbf{A}}(\pi)$.

$$\mathbf{A}^{-1}|_{\alpha=\pi/2} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}|_{\alpha=\pi} \cdot \mathbf{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Линейные операторы в пространстве многочленов

Пример 6.7. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 задан оператор: $\hat{\mathbf{A}}p(t) = 4p(t) - tp'(t)$.

а) Доказать, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$ является линейным.

б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в каноническом базисе $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$.

в) Найти образ многочлена $q(t) = t^2 - t - 2$.

г) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$. д) Является ли оператор обратимым? Найти прообраз многочлена $r(t) = 6t^2 + 4t - 3$.

◀а) Проверим линейность оператора:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(p_1(t) + p_2(t)) &= 4(p_1(t) + p_2(t)) - t(p_1(t) + p_2(t))' = \\ &= (4p_1(t) - tp_1'(t)) + (4p_2(t) - tp_2'(t)) = \hat{\mathbf{A}}p_1(t) + \hat{\mathbf{A}}p_2(t).\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha p(t)) = 4(\alpha p(t)) - t(\alpha p(t))' = \alpha(4p(t) - tp'(t)) = \alpha \hat{\mathbf{A}}p(t).$$

Следовательно, оператор $\hat{\mathbf{A}}$ — линеен.



б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в $\mathfrak{B}_{P_2}$.

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = 1, \bar{\mathbf{e}}_2 = t, \bar{\mathbf{e}}_3 = t^2.$$

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 4p(t) - tp'(t).$$

Найдём образы базисных векторов:

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = 4 \cdot 1 - t(1)' = 4; \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = 4 \cdot t - t \cdot t' = 3t; \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_3 = 4 \cdot t^2 - t(t^2)' = 2t^2.$$

Выпишем матрицу $\mathbf{A}$ соответствующую данному оператору $\hat{\mathbf{A}}$. Для этого в столбцы матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ записываем образы базисных векторов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

в) Найти образ многочлена $q(t) = t^2 - t - 2$.

$$\hat{\mathbf{A}}q(t) = 4(t^2 - t - 2) - t(t^2 - t - 2)' = 4t^2 - 4t - 8 - 2t^2 + t = 2t^2 - 3t - 8.$$



г) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 4p(t) - tp'(t).$$

Решаем ОСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rang } \mathbf{A} = 3 \Rightarrow$ ОСЛАУ имеет единственное тривиальное решение
 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow \ker \hat{\mathbf{A}} = \{0\}$.

$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{0\}, \Rightarrow \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{P}_2, \Rightarrow \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 0.$$

д) Является ли оператор обратимым? Найти прообраз многочлена
 $r(t) = 6t^2 + 4t - 3$.

$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{0\}, \Rightarrow \text{оператор обратим.} \quad \det \mathbf{A} = 12 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём прообраз вектора $r(t)$ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Получили, прообразом многочлена $r(t) = 6t^2 + 4t - 3$ для оператора $\hat{\mathbf{A}}$ является многочлен $-1 + t + t^2$. ►

Пример 6.8. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 задан оператор: $\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1)$.

а) Доказать, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$ является линейным.

б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в каноническом базисе $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$.

в) Найти образ многочлена $q(t) = t^2 - t - 2$.

г) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$. Является ли оператор обратимым?

д) Найти прообразы многочленов: $r_1(t) = t^2 + t - 2$ и $r_2(t) = 6t - 8$.

◀а) Проверим линейность оператора:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}(p_1(t) + p_2(t)) &= 2(p_1(t) + p_2(t)) - t(p_1(t-1) + p_2(t-1))' = \\ &= (2p_1(t) - tp_1'(t-1)) + (2p_2(t) - tp_2'(t-1)) = \hat{\mathbf{A}}p_1(t) + \hat{\mathbf{A}}p_2(t).\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha p(t)) = 2(\alpha p(t)) - t(\alpha p(t-1))' = \alpha(2p(t) - tp'(t-1)) = \alpha\hat{\mathbf{A}}p(t).$$

Следовательно, оператор $\hat{\mathbf{A}}$ — линейен.



б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в $\mathfrak{B}_{P_2}$.

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = 1, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = t, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = t^2.$$

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1)$$

Найдём образы базисных векторов:

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_1 = 2 \cdot 1 - t(0)' = 2; \quad \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_2 = 2 \cdot t - t \cdot (t-1)' = t;$$

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}}_3 = 2 \cdot t^2 - t((t-1)^2)' = 2t^2 - 2t(t-1) = 2t.$$

Выпишем матрицу $\mathbf{A}$ соответствующую данному оператору $\hat{\mathbf{A}}$. Для этого в столбцы матрицы $\hat{\mathbf{A}}$ записываем образы базисных векторов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) Найти образ многочлена $q(t) = t^2 - t - 2$.

1 способ

$$\begin{aligned} &\text{Преобразуем } q(t-1) = \\ &= (t-1)^2 - (t-1) - 2 = t^2 - 2t + 1 - t + 1 - 2 = t^2 - 3t \Rightarrow q'(t-1) = 2t - 3. \end{aligned}$$

$$\hat{\mathbf{A}}q(t) = 2q(t) - tq'(t-1) = 2(t^2 - t - 2) - t(2t - 3) = 2t^2 - 2t - 4 - 2t^2 + 3t = t - 4.$$

2 способ

Образ многочлена $q(t) = t^2 - t - 2$ проще найти умножением матрицы оператора $\mathbf{A}$ на вектор-столбец прообраза

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получили тот же значение для образа многочлена $q(t) = t - 4$.



г) Найти ядро, образ и дефект оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Решаем ОСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \bar{\mathbf{0}}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang} \mathbf{A} = 2 \Rightarrow$ ОСЛАУ имеет бесконечное одномерное множество решение. Найдём её решений. Для этого запишем систему в стандартном виде

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2c, \\ x_3 = c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\ker \hat{\mathbf{A}} = \{p(t) \mid p(t) = ct^2 - 2c, \quad c \in \mathbb{R}\}.$$

Проверяем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Найдём образ оператора.

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 способ. Применим оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к произвольному вектору $p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathbb{P}_2$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(a + bt + ct^2) &= 2(a + bt + ct^2) - t(a + b(t-1) + c(t-1)^2)' = \\ &= 2a + 2bt + 2ct^2 - t(b + 2c(t-1)) = 2a + (b + 2c)t. \end{aligned}$$

2 способ.

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ b + 2c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Получили тот же результат. Так как a, b, c произвольные действительные числа, в формуле 6.6 мы можем вместо $2a$ и $b + 2c$ записать a и b . Следовательно, образом оператора $\hat{\mathbf{A}}$ является линейное пространство $\mathbb{P}_1 = \{p(t) = a + bt | a, b \in \mathbb{R}\}$.

$$\text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{P}_1, \quad \dim \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = 2, \quad \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 1.$$



$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t - 1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

д) Найти прообразы многочленов: $r_1(t) = t^2 + t - 2$ и $r_2(t) = 6t - 8$.

Для этого решаем НСЛАУ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равен 2, а ранг расширенной матрицы $\mathbf{A}|\mathbf{R}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ равен 3, следовательно, согласно теореме Кронекелла-Капелли, данная система несовместна. Т.е. многочлен $r_1(t)$ не имеет прообраза.



д) Найти прообразы многочленов: $r_1(t) = t^2 + t - 2$ и $r_2(t) = 6t - 8$.

Рассмотрим второй многочлен

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t-1) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В этом случае ранг матрицы $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbb{R}_2) = \text{rang} \mathbf{A} = 2$, следовательно система совместна, но неопределённая. Решаем её:

$$\begin{cases} 2x_1 = -8, \\ x_2 + 2x_3 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 6 - 2c, \\ x_3 = c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Получили, прообразом многочлена $r_2(t) = 6t - 8$ для оператора $\hat{\mathbf{A}}$ является множество многочленов $s(t) = ct^2 + (6 - 2c)t - 4$, $c \in \mathbb{R}$.

Проверим, полученное решение при помощи подстановки полученной функции в оператор. Для этого применим к многочлену $s(t)$ оператор $\hat{\mathbf{A}}$.

Предварительно найдём $s'(t-1)$.

$$s'(t-1) = (c(t-1)^2 + (6-2c)t - (6-2c) - 4)' = 2c(t-1) + 6 - 2c = 2ct - 4c + 6.$$

$$\hat{\mathbf{A}}s(t) = 2s(t) - ts'(t-1) = 2ct^2 + 12t - 4ct - 8 - 2ct^2 + 4ct - 6t = +6t - 8 = s(t).$$

Следовательно, прообразом многочлена $r_2(t) = 6t - 8$ будет одномерное множество многочленов $s(t) = ct^2 + (6 - 2c)t - 4$, $c \in \mathbb{R}$. ►



Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич