

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 7

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Берков Николай Андреевич

25 марта 2023г

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Рассмотрим n -мерное векторное пространство V и линейный оператор $\hat{A} : V \rightarrow V$.

Определение 7.1. Ненулевой вектор $\bar{x} \in V$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\hat{A}$, если существует действительное число λ такое, что

$$\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad \bar{x} \neq \bar{0}. \quad (7.1)$$

Действительное число λ называется **собственным значением** или **собственным числом** оператора $\hat{A}$, если существует ненулевой вектор $\bar{x}$ такой, что выполняется равенство (7.1).

При наличии равенства (7.1) вектор $\bar{x}$ называется **собственным вектором** оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному значению λ , а λ — **собственным значением**, соответствующим собственному вектору $\bar{x}$.

Изучение собственных векторов и соответствующих им собственным значениям, представляет исключительный интерес ввиду того, что многие соотношения существенно упрощаются, если в качестве базисных векторов использовать собственные вектора оператора. Кроме того, матрица линейного оператора, записанная в базисе из собственных векторов, имеет простейший вид.



Теорема 7.1. Совокупность всех собственных векторов линейного оператора $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, относящихся к одному и тому же собственному значению λ , вместе с нулевым вектором образуют подпространство пространства $\mathbb{V}$.

► Пусть $\mathbf{M}_\lambda$ — множество всех собственных векторов, относящихся к собственному значению λ с добавленным вектором $\bar{\mathbf{0}}$.

Докажем, что данное множество является подпространством пространства $\mathbb{V}$.

Возьмём два произвольных вектора $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{M}_\lambda$.

Если $\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{M}_\lambda$.

Рассмотрим случай когда $\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 \neq \bar{\mathbf{0}}$ и докажем, что $\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{M}_\lambda$.

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2) = \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}_1) + \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}_2) = \lambda\bar{\mathbf{x}}_1 + \lambda\bar{\mathbf{x}}_2 = \lambda(\bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2) \Rightarrow \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{M}_\lambda.$$

Аналогично, для любого числа α , если $\alpha\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow \alpha\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbf{M}_\lambda$,

а если $\alpha\bar{\mathbf{x}}_1 \neq \bar{\mathbf{0}} \Rightarrow$

$$\hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}_1) = \alpha\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}_1) = \alpha(\lambda\bar{\mathbf{x}}_1) = \lambda(\alpha\bar{\mathbf{x}}_1) \Rightarrow \alpha\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbf{M}_\lambda. \blacktriangleright$$



Теорема 7.2. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k$ линейно независимы.

◀ Для доказательства применим метод математической индукции.

1. *База индукции.* Пусть $k = 1$ и $\bar{\mathbf{e}}_1$ — собственный вектор. Следовательно, $\bar{\mathbf{e}}_1 \neq \bar{\mathbf{0}}$. Утверждение справедливо, так как один ненулевой вектор $\bar{\mathbf{e}}_1$ всегда является линейно независимым.

2. *Шаг индукции.* Предположим, что утверждение теоремы доказано для m векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_m$. Т.е. эта система собственных векторов линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, соответствующая различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ является линейно независимой. Следовательно, линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{0}}, \quad (7.2)$$

только когда все $\alpha_i = 0$.

Добавим к этим векторам ещё один вектор $\bar{\mathbf{e}}_{m+1}$ и допустим, что имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i \bar{\mathbf{e}}_i = \bar{\mathbf{0}}.$$



Применим линейный оператор к данному равенству. Учитывая свойства линейного оператора: $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}}$, $\hat{\mathbf{A}}(\alpha_1 \bar{\mathbf{x}} + \alpha_2 \bar{\mathbf{y}}) = \alpha_1 \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) + \alpha_2 \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{y}})$,

получим
$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k \hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{0}}, \quad (7.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{0}}.$$

Так как $\bar{\mathbf{e}}_k$ — собственные вектора оператора $\hat{\mathbf{A}}$, соответствующие различным собственным значениям λ_k , следовательно $\hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{e}}_k = \lambda_k \bar{\mathbf{e}}_k$.

Поэтому равенство (7.4) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{0}}, \quad (7.5)$$

Умножим равенство (7.2) на коэффициент λ_{m+1}

$$\sum_{i=1}^m \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{0}}, \quad (7.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{m+1} \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k = \bar{\mathbf{0}}. \quad (7.6)$$

Теперь вычтем из равенства (7.5) равенство (7.6), получаем

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k + \lambda_{m+1} \alpha_{m+1} \bar{\mathbf{e}}_{m+1} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (7.7)$$



$$\sum_{i=1}^m (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k \bar{\mathbf{e}}_k + \lambda_{m+1} \alpha_{k+1} \bar{\mathbf{e}}_{k+1} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (7.7)$$

По условию теоремы все λ_k различны, следовательно, при $k = 1, 2, \dots, m$ $\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$.

Учитывая, что по предположению о независимости системы собственных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_m$, следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$.

Поэтому из (7.5), а также из условия что $\bar{\mathbf{e}}_{m+1}$ — собственный вектор, следовательно он отличен от нулевого вектора, вытекает, что $\alpha_{m+1} = 0$.

Это означает, что система векторов $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_m, \bar{\mathbf{e}}_{m+1}$ линейно независима. Теорема доказана. ►



Теорема 7.2. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k$ линейно независимы.

СЛЕДСТВИЕ: 7.1. В том случае, когда линейный оператор $\hat{\mathbf{A}} \in L(V, V)$ имеет n различных собственных значений, соответствующие этим собственным значениям собственные векторы составляют базис данного n -мерного пространства V .

Ниже будет доказано, что в таком базисе матрица оператора $\hat{\mathbf{A}}$, принимает диагональный вид.



7.1. Нахождение собственных значений и собственных векторов.

Рассмотрим n -мерное векторное пространство $\mathbb{V}$ и линейный оператор $\hat{\mathbf{A}} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Зафиксируем некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ пространства $\mathbb{V}$ и обозначим через $\mathbf{A}$ матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в этом базисе.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \lambda\bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}. \quad (7.1)$$

Равенство (7.1) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}, \quad (7.8)$$

Заменяя в (7.8) матрицу-столбец $\mathbf{X}$ произведением $\mathbf{E}\mathbf{X}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица порядка n , приведём уравнение к виду $\mathbf{A}\mathbf{X} - \lambda\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ или

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (7.9)$$



$$(7.9)$$

Мы получили матричную запись системы линейных однородных уравнений, основная матрица которой содержит параметр λ . Запишем эту систему в развёрнутом виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или в виде системы однородных линейных уравнений

[illegible]

[illegible]

Согласно определению (7.1) собственный вектор $\bar{x}$ не равен нулевому вектору. Поэтому система однородных уравнений (7.10) должна иметь ненулевое решение. Следовательно, определитель системы обязан быть равным нулю. Очевидно, что

- 1) собственными значениями оператора $\hat{\mathbf{A}}$ являются те значения параметра λ , при которых система (7.10) имеет ненулевые решения:
- 2) собственными векторами этого оператора являются ненулевые решения системы (7.10).

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.11)$$

Левая часть уравнения (7.11) представляет собой многочлен n -ной степени относительно λ , что следует из определения определителя.



$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.11)$$

Определение 7.2. Многочлен $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, а уравнение (7.11) – **характеристическим уравнением** линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

В определении характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ используется матрица $\mathbf{A}$ определённая в некотором базисе $\mathfrak{B}$. Докажем, что характеристический многочлен не зависит от выбора базиса пространства.

Теорема 7.3. Пусть $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ – два базиса в $\mathbb{V}$, а $\mathbf{A}_E$ и $\mathbf{A}_F$ – матрицы оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$ соответственно.

Тогда $|\mathbf{A}_E - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{A}_F - \lambda \mathbf{E}|$.

Иными словами, характеристический многочлен $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$ не зависит от выбора базиса.



► Согласно формуле (5.9) матрицы A_E и A_F оператора $\hat{A}$ в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$ связаны соотношением $A_F = P^{-1}A_E P$, где $P = P_{E \rightarrow F}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$.

Запишем $E = P^{-1}P = P^{-1}EP$,

$$A_F - \lambda E = P^{-1}A_E P - \lambda P^{-1}EP = P^{-1}(A_E - \lambda E)P.$$

$$|AB| = |A||B| \text{ и } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|},$$

Получаем

$$|A_F - \lambda E| = |P^{-1}(A_E - \lambda E)P| = \frac{1}{|P|}|A_E - \lambda E||P| = |A_E - \lambda E|.$$

Теорема доказана. ►



Линейные операторы простого типа

Определение 7.3. Линейный оператор $\hat{A} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, называется приводимым к диагональному виду, если существует базис пространства $\mathbb{V}$, в котором матрица этого оператора диагональна.

Такие операторы называются **операторами простого типа**.

Теорема 7.4. Для того чтобы матрица A линейного оператора $\hat{A}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы векторы базиса $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ были собственными векторами этого оператора.

► **Необходимость.** Пусть матрица A в заданном базисе $\mathfrak{B}$ является диагональной:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Тогда по определению матрицы оператора в базисе $\mathfrak{B}$

$$\hat{A}(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1, \hat{A}(\bar{e}_2) = \lambda_2 \bar{e}_2, \dots, \hat{A}(\bar{e}_n) = \lambda_n \bar{e}_n.$$

Следовательно, базис $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$

Состоит из собственных векторов



Теорема 7.4. Для того чтобы матрица A линейного оператора $\hat{A}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы векторы базиса $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ были собственными векторами этого оператора.

Достаточность. Предположим что векторы базиса $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ n -мерного пространства V , состоят из собственных векторов оператора $\hat{A}$, соответствующим собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Тогда из определения собственных векторов следует

$$\hat{A}(\bar{e}_1) = \lambda_1 \bar{e}_1, \hat{A}(\bar{e}_2) = \lambda_2 \bar{e}_2, \dots, \hat{A}(\bar{e}_n) = \lambda_n \bar{e}_n.$$

Следовательно, матрицы A имеет диагональный вид (7.12). Теорема доказана. ►

Замечание 7.1. Согласно теоремы 7.2, если оператор размерности n имеет n различных собственных чисел, то он является оператором простого типа. Однако это условие не является необходимым. Существуют линейные операторы простой структуры, у которых характеристический многочлен имеет кратные корни, а количество независимых собственных векторов равно n .



Пример 7.1. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}\}$ задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти базис $\mathfrak{B}_\lambda$ в котором матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид. По формуле $\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{P}_{I \rightarrow \lambda}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_{I \rightarrow \lambda}$ проверить полученный результат.

► Составим характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решаем это квадратное уравнение.

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2.$$

Найдём теперь собственные вектора, соответствующие найденным собственным значениям. Для этого последовательно подставляем найденные собственные значения в систему

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$



[illegible]

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + (-1 - \lambda_1)x_2 = 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

1) $\lambda_1 = -2$. Подставляем это значение в систему (7.13)

$$\begin{cases} (1+2)x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + (-1+2)x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Ранг матрицы равен 1, поэтому существует одномерное многообразие решений системы. Выбираем в качестве базисной неизвестной x_1 , а свободной неизвестной $x_2 = c_1 \in \mathbb{R}$, получаем общее решение однородной системы

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_1 \neq 0.$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad c_1 \neq 0. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Проверим полученное решение. Для этого умножаем матрицу $\mathbf{A}$ на матрицу-столбец общего решения $\mathbf{Y}_1 = (-c_1 \ c_1)^T$.

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 + 3c_1 \\ -c_1 - c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ -2c_1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{Y}_1.$$

Таким образом, одномерное многообразие векторов $\bar{\mathbf{e}}_1(-c_1; c_1)$, $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$ является собственными векторами оператора $\hat{\mathbf{A}}$, соответствующими собственному значению $\lambda_1 = -2$.

В качестве фундаментальной системы решений (7.13) выбираем один вектор $\bar{\mathbf{e}}_1 = (-1; 1)$, полученный при $c_1 = 1$.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) $\lambda_1 = 2$. Подставляем это значение в систему (7.10)

$$\begin{cases} (1-2)x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + (-1-2)x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3x_2.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0.$$

Фундаментальная система решений имеет базисный вектор $\bar{\mathbf{e}}_2 = (3; 1)$.

Таким образом, базис, в котором матрица $\mathbf{A}$ диагональна, состоит из двух векторов $\mathfrak{B}_\lambda = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = (-1; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (3; 1)\}$, а сама матрица оператора в этом базисе равна

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

В условии задачи записано, проверить полученный результат. Для проверки используем формулу перехода линейного оператора к новому базису, которая выводилась в предыдущей лекции.

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получили тот же результат.



Пример 7.2. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, заданного в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ матрицей $\mathbf{A}$. Является ли линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ оператором простого типа? Если является, то записать матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_\lambda$ состоящем из собственных векторов.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3 - \lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - \lambda) \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 3 \\ 0 & -2 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & -3 - \lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(2 - \lambda)(3 + \lambda)(2 + \lambda) - 10 - 5\lambda + 3 + 2(0 - (3 + \lambda)) = 0,$$

$$(4 - \lambda^2)(3 + \lambda) - 7 - 5\lambda - 6 - 2\lambda = 0,$$

$$12 + 4\lambda - 3\lambda^2 - \lambda^3 - 13 - 7\lambda = 0,$$

$$-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Следовательно, заданный оператор имеет только одно собственное значение $\lambda = -1$. Найдём собственный вектор соответствующий данному собственному значению.

$$\begin{cases} (2 + 1)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + (-3 + 1)x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + (-2 + 1)x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$



- (1) К первой строке прибавили третью умноженную на 5. Ко второй строке прибавили третью умноженную на 3.
- $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$
- (2) Первую строку умножили на -1 . Ко второй строке добавили первую умноженную на 2. Переставили третью строку на первое место.

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2, следовательно система имеет два базисных неизвестных и одно свободное.

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2 , а свободной неизвестной $x_3 = -c \in \mathbb{R}$, получаем общее решение однородной системы $x_1 = -x_3 = c$, $x_2 = -x_3 = c$, $x_3 = x_3 = -c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\bar{\mathbf{x}} = (c; c; -c), c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$



Проверка:

$$\bar{\mathbf{x}} = (c; c; -c), c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ c \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c - c - 2c \\ 5c - 3c - 3c \\ -c + 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ c \end{pmatrix} = (-1)\mathbf{X}.$$

В результате мы получили, что оператор $\hat{\mathbf{A}}$ имеет только один собственный вектор. Следовательно, оператор $\hat{\mathbf{A}}$ не является оператором простого типа.

Ответ: $\lambda = -1, \quad \bar{\mathbf{x}}_\lambda = (1; 1; -1)c, \quad c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$



Пример 7.3. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, заданного в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$ матрицей $\mathbf{A}$. Является ли линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ оператором простого типа? Если является, то записать матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_\lambda$ состоящем из собственных векторов.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

◀ Составим характеристическое уравнение (7.11) и решаем его

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 3 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5 - \lambda)((2 - \lambda)^2 - 1) = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 5, 2 - \lambda = \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.$$



$$\underline{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1.}$$

$$1) \lambda_1 = 5.$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{5}{4}x_3, \\ x_1 = 3x_2 - 3x_3 = \frac{3}{4}x_3. \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2, следовательно система имеет два базисных неизвестных и одно свободное.

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2 , а свободной неизвестной $x_3 = c_1 \in \mathbb{R}$, получаем общее решение однородной системы

$$x_1 = \frac{3}{4}x_3 = \frac{3}{4}c_1, x_2 = \frac{5}{4}x_3 = \frac{5}{4}c_1, x_3 = x_3 = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0. \quad \bar{\mathbf{x}}_1 = \left(\frac{3}{4}c_1; \frac{5}{4}c_1; c_1 \right), c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0.$$

$$\bar{\mathbf{f}}_1 = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 1 \right).$$



Проверка:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4}c_1 \\ \frac{5}{4}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}c_1 \\ \frac{25}{4}c_1 \\ 5c_1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{pmatrix} c_1 = 5X_1.$$

2) $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = (c_2; c_2; 0), c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0.$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_2 \\ 3c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3X_2$$

$$\bar{\mathbf{f}}_2 = (1; 1; 0).$$



3) $\lambda_3 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы **A** равен 2, следовательно система имеет два базисных неизвестных и одно свободное.

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_3 , а свободной неизвестной $x_2 = c_3 \in \mathbb{R}$, получаем общее решение однородной системы $x_1 = -x_2 = -c_3, x_2 = c_3, x_3 = 0, \quad c_3 \in \mathbb{R}$.

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \neq 0.$$

$$\bar{\mathbf{X}}_3 = (c_3; -c_3; 0), c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \neq 0.$$

Фундаментальная система решений состоит из вектора $\bar{\mathbf{f}}_3 = (1; -1; 0)$.

Проверка:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_3 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} c_3 = 1 \cdot \mathbf{X}_3.$$



В качестве базисных векторов можно взять полученные вектора:

$\bar{\mathbf{f}}_1 = \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}; 1\right)$, $\bar{\mathbf{f}}_2 = (1; 1; 0)$, $\bar{\mathbf{f}}_3 = (1; -1; 0)$. В данном базисе матрица оператора $\hat{\mathbf{A}}$ будет диагональной

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Пример 7.4. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, заданного матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2((\lambda-2)(\lambda+1)+2) = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda-1) = 0.$$

Следовательно, заданный оператор имеет только два собственных значения: трёхкратный $\lambda_1 = 0$ и однократный $\lambda_1 = 1$. Найдём собственные вектора соответствующие данным собственным значениям.



$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -\lambda x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + (-1 - \lambda)x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 - \lambda x_4 = 0. \end{cases} \quad (7.14) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Найдём собственные вектора соответствующие трёхкратному корню $\lambda = 0$ характеристического уравнения $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$.

Подставим в уравнение (7.14) $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 0 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Решаем данную систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2, следовательно система имеет два базисных неизвестных и два свободное.



$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_1 и x_2 , а свободной неизвестной x_3 и x_4 . Для того, чтобы в решении не фигурировали дробные числа, свободные неизвестные приравняем: $x_3 = 2c_1$ и $x_4 = 2c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$x_1 = 0,5x_3 - 1,5x_4 = c_1 - 3c_2, \quad x_2 = 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

В качестве фундаментальной системы решений однородной системы (7.15) можно взять два вектора: $\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 0; 2; 0)$ и $\bar{\mathbf{e}}_2 = (-3; 0; 0, 2)$. Они образуют базис пространства решений системы (7.15). Совокупность всех решений данной системы это линейная оболочка фундаментальной системы $c_1\bar{\mathbf{e}}_1 + c_2\bar{\mathbf{e}}_2$, где c_1 и c_2 любые действительные числа. Все эти векторы, кроме нулевого, когда $c_1 = c_2 = 0$ или $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ являются собственными векторами нашего оператора $\hat{\mathbf{A}}$.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, собственными векторами оператора $\hat{\mathbf{A}}$, соответствующими собственному числу $\lambda = 0$, являются ненулевые векторы являющиеся линейной комбинацией фундаментальной системы решений однородной системы (7.15)

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{f}}(c_1; c_2) = (1; 0; 2; 0)c_1 + (-3; 0; 0; 2)c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$$

Или в таком виде: $\bar{\mathbf{x}} = (c_1 + 3c_2; 0; 2c_1; 2c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$

$$\begin{aligned} \text{Проверка: } \mathbf{A}\mathbf{X}_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 0 \\ 2c_1 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2c_1 + 6c_2 - 2c_1 + 6c_2 \\ 0 \\ 2c_1 + 6c_2 - 2c_1 + 6c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\mathbf{X}_1. \end{aligned}$$



2) Найдём собственные вектора соответствующие однократному корню $\lambda = 1$ характеристического уравнения $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$.

Подставим в уравнение (7.14) $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 0 - x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases} \quad (7.16)$$

Решаем данную систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 3, следовательно система имеет три базисных неизвестных и одно свободное.

Выбираем в качестве базисных неизвестных x_1, x_2 и x_4 , а свободное — $x_3 = c$. Получаем общее решение однородной системы (7.16) $x_1 = c_3, x_2 = 0, x_3 = c_3, x_4 = 0, \quad c \in \mathbb{R}$. Тогда собственным вектором соответствующим собственному значению $\lambda = 1$ будут векторы $\bar{\mathbf{x}} = (1; 0; 1; 0)c_3, \quad c \in \mathbb{R} \quad c_3 \neq 0$.



В качестве фундаментальной системы решений однородной системы (7.15) можно взять ненулевой вектор: $\bar{\mathbf{e}}_3 = (1; 0; 1; 0)$.

Проверка:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 - c_3 \\ 0 \\ 2c_3 - c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\mathbf{X}_3.$$

Ответ:

$$\lambda_1 = 0, \quad \{\bar{\mathbf{x}}_1 = (1; 0; 2; 0)c_1, \bar{\mathbf{x}}_2 = (-3; 0; 0; 2)c_2\}, \\ \lambda_2 = 1, \bar{\mathbf{x}}_3 = (1; 0; 1; 0)c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}, c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \neq 0.$$



РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Лекция 7

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

25 марта 2023г