

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Лекция 8

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Берков Николай Андреевич

1 апреля 2023г

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Основные определения и теоремы 7 лекции

Рассмотрим n -мерное векторное пространство $\mathbb{V}$ и линейный оператор $\hat{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$.

Определение 7.1. Ненулевой вектор $\bar{x} \in \mathbb{V}$ называется **собственным вектором** линейного оператора $\hat{A}$, если существует действительное число λ такое, что

$$\hat{A}\bar{x} = \lambda\bar{x}, \quad \bar{x} \neq \bar{0}. \quad (7.1)$$

Действительное число λ называется **собственным значением** или **собственным числом** оператора $\hat{A}$, если существует ненулевой вектор $\bar{x}$ такой, что выполняется равенство (7.1).

Теорема 7.1. Совокупность всех собственных векторов линейного оператора $\hat{A} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, относящихся к одному и тому же собственному значению λ , вместе с нулевым вектором образуют подпространство пространства $\mathbb{V}$.



Теорема 7.2. Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ различны. Тогда отвечающие им собственные векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_k$ линейно независимы.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.11)$$

Определение 7.2. Многочлен $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$, а уравнение (7.11) – **характеристическим уравнением** линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Теорема 7.3. Пусть $\hat{\mathbf{A}} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ – два базиса в $\mathbb{V}$, а $\mathbf{A}_E$ и $\mathbf{A}_F$ – матрицы оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисах $\mathfrak{B}_E$ и $\mathfrak{B}_F$ соответственно.

Тогда $|\mathbf{A}_E - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{A}_F - \lambda \mathbf{E}|$.

Иными словами, характеристический многочлен $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|$ не зависит от выбора базиса.



Линейные операторы простого типа

Определение 7.3. Линейный оператор $\hat{A} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, называется приводимым к диагональному виду, если существует базис пространства $\mathbb{V}$, в котором матрица этого оператора диагональна.

Такие операторы называются **операторами простого типа**.

Определение 7.3. Линейный оператор $\hat{A} \in L(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, называется приводимым к диагональному виду, если существует базис пространства $\mathbb{V}$, в котором матрица этого оператора диагональна.

Такие операторы называются **операторами простого типа**.

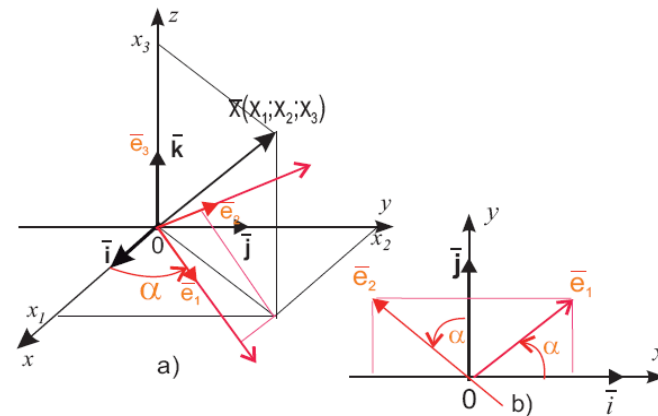
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Теорема 7.4. Для того чтобы матрица A линейного оператора $\hat{A}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы векторы базиса $\mathfrak{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ были собственными векторами этого оператора.



Собственные вектора операторов действующих в векторном пространстве

Пример 8.1. Пусть $\hat{A}_\alpha$ линейный оператор который поворачивает вектор $\bar{x} \in V_3$ заданный в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ вокруг оси Oz на угол α , рис. 12. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}_\alpha$.



► Из геометрических соображений, следует, что при повороте на угол $\alpha \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, все вектора $\bar{x} \in V_3$, которые не коллинеарны оси Oz , переходят в вектор $\bar{y} = \hat{A}_\alpha \bar{x}$ не коллинеарный вектору $\bar{x}$.

Частные случаи, когда $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$ рассмотрим ниже.

Все векторы $\bar{x} = c\bar{k}$, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$, т.е. векторы коллинеарные орту $\bar{k}$, при таком повороте остаются без изменения.

Для этих векторов выполняется условие $\hat{A}_\alpha(\bar{x}) = 1 \cdot \bar{x}$.

Тем самым, используя геометрическое представление, мы нашли единственное собственное значение $\lambda = 1$ и одномерное множество собственных векторов $\bar{x} = c\bar{k}$, $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

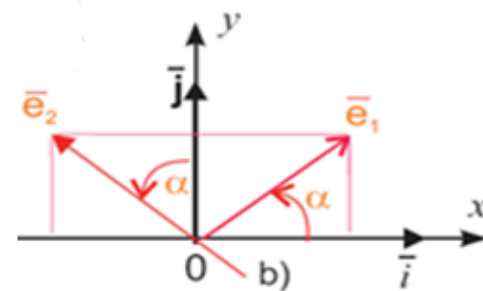
В качестве базиса данного одномерного линейного подпространства, с добавленным нулевым вектором, выбираем орт $\bar{k}$.

$$\hat{A}_\alpha(\bar{k}) = 1 \cdot \bar{k}.$$



Рассмотрим поворот на угол $\alpha = \pi$.

В этом случае любой вектор $\bar{x}$, находящийся в плоскости Oxy , переходит в противоположный вектор $-\bar{x}$.



Поэтому любой такой вектор $\bar{x} = (c_1; c_2; 0)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ является собственным вектором с собственным значением $\lambda = -1$.

$$\hat{A}_\pi(c_1; c_2; 0) = -(c_1; c_2; 0).$$

В качестве базиса данного двумерного линейного подпространства, с добавленным нулевым вектором, выбираем орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

$$\text{При этом } \hat{A}_\pi(\bar{i}) = -\bar{i}, \quad \hat{A}_\pi(\bar{j}) = -\bar{j}, \quad \hat{A}_\pi(\bar{k}) = -\bar{k}.$$

$$A_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При $\alpha = 2\pi$ все векторы остаются на месте, т.е. оператор $\hat{A}_{2\pi}$ является тождественным. Поэтому для $\hat{A}_{2\pi}$ любой такой вектор $\bar{x} \in V_3$ является собственным вектором с собственным значением $\lambda = 1$.



$$\hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{k}}.$$

$$\hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{e}}_1 = \cos \alpha \bar{\mathbf{i}} + \sin \alpha \bar{\mathbf{j}}; \quad \hat{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{j}} = \bar{\mathbf{e}}_2 = -\sin \alpha \bar{\mathbf{i}} + \cos \alpha \bar{\mathbf{j}};$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение $|\mathbf{A}_\alpha - \lambda \mathbf{E}| = 0$.

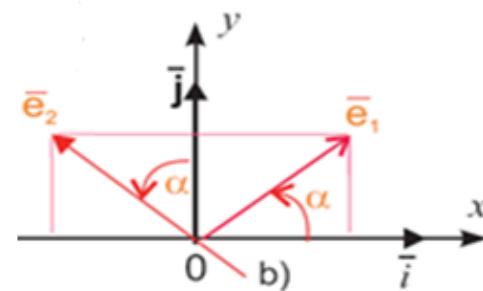
$$|\mathbf{A}_\alpha - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1 - \lambda) ((\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda^2 - 2\lambda \cos \alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

$$\lambda_{2,3} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = \cos \alpha \pm i |\sin \alpha|.$$

При $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ имеется только один действительный корень $\lambda = 1$.

Характеристическое уравнение имеет три действительных корня только при $\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.



Рассмотрим поворот на угол $\alpha = \pi$. Тогда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -1$.

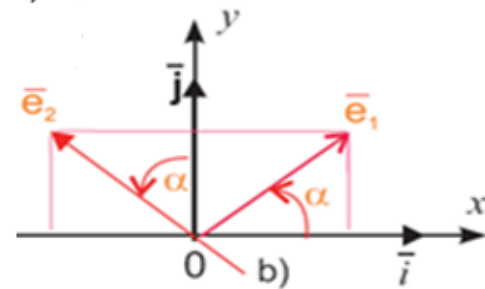
Для определения собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_{2,3} = -1$ при $\alpha = \pi$, получаем систему

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \cos \alpha \pm i|\sin \alpha|. \quad \mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Подставляем $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



Ранг системы равен единице, а число неизвестных три, следовательно ОСЛАУ совместна, но неопределённая, имеет бесконечное двумерное многообразие решений, которое можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$



Таким образом, любой вектор $\bar{x} = (c_1; c_2; 0) \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ является собственным вектором оператора $\hat{A}_\pi$ с собственным значением $\lambda = -1$.

В качестве базиса этого подпространства с добавленным нулевым вектором, можно взять вектора $\bar{i}$ и $\bar{j}$.

Матрица оператора в базисе собственных векторов равна:

$$A_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = 2\pi$ оператор $\hat{A}_{2\pi}$ является тождественным. В этом случае его матрица является единичной и любой ненулевой вектор является собственным с собственным значением $\lambda = 1$.

Замечание 8.1. Заметим, что оператор $\hat{A}_\pi$ можно определить как оператор зеркального отображения векторов $\mathbb{V}_3$ относительно оси Oz . При этом образом вектора $\bar{x} = (x; y; z)$ будет в вектор $\bar{y} = (-x; -y; z)$. ◀



Пример 8.2. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}_h$ — гомотетия с коэффициентом $k \neq 0$ (пропорциональное изменение координат вектора) в пространстве $\mathbb{V}_3$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}_h$.

► Получим матрицу данного линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}_h$ в базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$. Для этого применим к базисным векторам оператор гомотетии.

$$\hat{\mathbf{A}}_h \bar{\mathbf{i}} = k\bar{\mathbf{i}} = (k; 0; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}_h \bar{\mathbf{j}} = k\bar{\mathbf{j}} = (0; k; 0), \quad \hat{\mathbf{A}}_h \bar{\mathbf{k}} = k\bar{\mathbf{k}} = (0; 0; k).$$

Выпишем матрицу $\mathbf{A}_h$.

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора имеет диагональный вид, следовательно оператор является оператором простого вида и значения на диагонали равны собственным числам. Т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = k$.

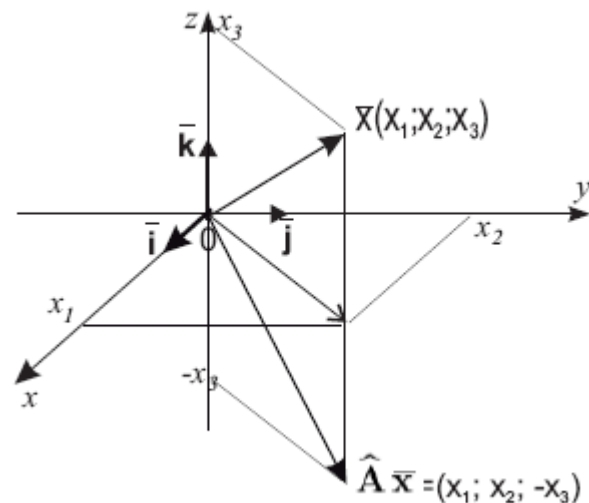
$\hat{\mathbf{A}}_h \bar{\mathbf{x}} = k\bar{\mathbf{x}}$, следовательно любой вектор $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}_3$ является собственным вектором, а параметр гомотетии k является собственным числом этого вектора. ◀



Пример 8.3. Линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}_Z$ – зеркальной отражение отображение относительно плоскости Oxy в пространстве $\mathbb{V}_3$. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}_Z$.

► При таком преобразовании вектор $\bar{\mathbf{x}} = (x; y; z)$ переходит в вектор $\bar{\mathbf{y}} = (x; y; -z)$. Базисные вектора $\bar{\mathbf{i}}$ и $\bar{\mathbf{j}}$ неподвижны, а орт $\bar{\mathbf{k}}$ меняет знак на противоположный.

$$\mathbf{A}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Получается, что все векторы $\bar{\mathbf{x}} = (c_1; c_2; 0)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, т.е. находящиеся на плоскости Oxy , остаются неподвижными.

$$\hat{\mathbf{A}}_Z(c_1; c_2; 0) = (c_1; c_2; 0), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Т.е. любой такой вектор является собственным вектором с собственным значением $\lambda = 1$.

Среди этого двумерного многообразия собственных векторов выбираем в качестве базисных орты $\bar{i}$ и $\bar{j}$ образующие ортонормированный базис подпространства данных собственных векторов с добавленным нулевым вектором.

Кроме того, все векторы $\bar{x} = c_3 \bar{k}$, $c_3 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$ оператор $\hat{A}_Z$ преобразуют в вектора $-\bar{x}$. Поэтому в качестве третьего базисного выбираем вектор $\bar{k}$.

$$\hat{A}_Z \bar{k} = -\bar{k} \Rightarrow \lambda = -1.$$

Следовательно, векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ являются собственными векторами, а $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ являются собственными значениями этих векторов. ◀



Пример 8.9. В пространстве $\mathbb{P}_2$ многочленов степени не выше 2 задан оператор: $\hat{\mathbf{A}}p(t) = 2p(t) - tp'(t - 1)$.

Найти собственные числа и собственные векторы оператора $\hat{A}$.

◀ $\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = t, \bar{e}_3 = t^2$.

Найдём образы базисных векторов:

$$\hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}_1 = 2 \cdot 1 - t(0)' = 2; \quad \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}_2 = 2 \cdot t - t \cdot (t-1)' = t;$$

$$\widehat{\mathbf{A}}\mathbf{e}_3 = 2 \cdot t^2 - t((t-1)^2)' = 2t^2 - 2t(t-1) = 2t.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(2 - \lambda)(1 - \lambda) = 0.$$

Получили три различные собственных значения:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 2.$$

[illegible]



$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 = 0, \\ (1 - \lambda)x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_3 = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $\lambda_1 = 0$. Подставляем это значение в систему (8.2)

$$\begin{cases} 2x_1 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2c_1, \\ x_3 = c_1, c_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Получили $\bar{\mathbf{y}}_1 = (0; -2c_1; c_1)$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0$ одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 0$.



2) $\lambda_1 = 1$. Подставляем это значение в систему (8.2)

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x_1 = 0, \\ (1 - \lambda)x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_3 = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ 2x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = c_2, \\ x_3 = 0, \end{cases} c_2 \in \mathbb{R}.$$

Получили $\bar{\mathbf{y}}_2 = (0; c_2; 0)$, $c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0$ одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 1$.



3) $\lambda_1 = 2$. Подставляем это значение в систему (8.2)

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_3, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, c_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \begin{cases} (2 - \lambda)x_1 = 0, \\ (1 - \lambda)x_2 + 2x_3 = 0, \\ \lambda x_3 = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Получили $\bar{\mathbf{y}}_3 = (c_3; 0; 0)$, $c_3 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$ одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 2$.

$$\{\bar{\mathbf{y}}_1 = (0; -2c_1; c_1), \bar{\mathbf{y}}_2 = (0; c_2; 0), \bar{\mathbf{y}}_3 = (c_3; 0; 0)\}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Проверим все три системы собственных векторов.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Получили систему трёх независимых векторов $\{\bar{\mathbf{y}}_1 = (0; -2c_1; c_1), \bar{\mathbf{y}}_2 = (0; c_2; 0), \bar{\mathbf{y}}_3 = (c_3; 0; 0)\}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

В качестве фундаментальной системы решений (7.13) выбираем собственные вектора при $c_1 = c_2 = c_3 = 1$.

Получили три собственных вектора: $\bar{\mathbf{f}}_1 = (0; -2; 1)$, $\bar{\mathbf{f}}_2 = (0; 1; 0)$, $\bar{\mathbf{f}}_3 = (1; 0; 0)$, образующие базис $\mathfrak{B}_\lambda$ в котором матрица оператора $\hat{\mathbf{A}}$ имеет диагональный вид. Следовательно, оператор $\hat{\mathbf{A}}$ является оператором простого типа.

$$\mathfrak{B}_\lambda = \{(0; -2; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0)\}.$$

Запишем базисные вектора в виде многочленов $\mathfrak{B}_\lambda = \{-2t + t^2, t, 1\}$.

Матрица оператора в базисе $\mathfrak{B}_\lambda$ равна

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$



Примерный вариант контрольной работы

1. Является ли множество $\mathbf{L} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 | \bar{\mathbf{x}} = (a - 3b; -b; a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Проверить, что вектор $\bar{\mathbf{x}} = (-11; -3; 1) \in \mathbf{L}$ и разложить его по построенному базису. Дополнить базис подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^3$.

2. Показать, что многочлены $p_1(t) = 2t^2 + t + 1$, $p_2(t) = 2 - t$, $p_3(t) = t^2 + t - 1$ образуют базис пространства $\mathbb{P}_2$. Записать матрицу перехода от канонического базиса к данному и найти координаты многочлена $h(t) = -6 + 6t + 5t^2$ в этом базисе. Сделать проверку.

3. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ — поворот по часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox .

1) Найти матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

2) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{x}} = (-2; 5; 1)$.

3) Найти ядро и образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{\mathbf{A}}$ — оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.



5. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ оператор $\hat{A}$ действует по правилу: $\hat{A}\vec{x} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3)$.

- 1) Показать, что $\hat{A}$ линейный оператор.
- 2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
- 3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
- 4) Обратим ли оператор? Если да, то указать явный вид обратного оператора.
- 5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
- 6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.



1. Является ли множество $\mathbf{L} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 | \bar{\mathbf{x}} = (a - 3b; -b; a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$ векторов заданного вида линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Проверить, что вектор $\bar{\mathbf{x}} = (-11; -3; 1) \in \mathbf{L}$ и разложить его по построенному базису. Дополнить базис подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^3$.

◀ Заданное множество является подмножеством векторов в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Согласно определению линейного подпространства 3.1, данное множество $\mathbf{L}$ будет линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^3$, если оно замкнуто относительно операции сложения и умножения на число.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{\mathbf{x}}_1 = (a_1 - 3b_1; -b_1; a_1 + b_1)$ и $\bar{\mathbf{x}}_2 = (a_2 - 3b_2; -b_2; a_2 + b_2)$.

$\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2 \in \mathbf{L}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 &= (a_1 - 3b_1; -b_1; a_1 + b_1) + (a_2 - 3b_2; -b_2; a_2 + b_2) = \\ &= ((a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2); -(b_1 + b_2); (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)) = \\ &= (a - 3b; -b; a + b) \in \mathbf{L}, \end{aligned}$$

где $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$.

Следовательно, вектор $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}$ также принадлежит $\mathbf{L}$ и множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции сложения векторов.

$$\begin{aligned} 2) \quad \alpha \bar{\mathbf{x}}_1 &= \alpha(a_1 - 3b_1; -b_1; a_1 + b_1) = (\alpha a_1 - 3\alpha b_1; -\alpha b_1; \alpha a_1 + \alpha b_1) = \\ &= (a - 3b; -b; a + b) \in \mathbf{L}, \text{ где } a = \alpha a_1, b = \alpha b_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Таким образом, если вектор $\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbf{L}$, то и $\alpha \bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbf{L}$, следовательно множество $\mathbf{L}$ замкнуто относительно операции умножения вектора на число.



$$\mathbf{L} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 | \bar{\mathbf{x}} = (a - 3b; -b; a + b), a, b \in \mathbb{R}\}$$

Тем самым, доказано, что заданное множество векторов $\mathbf{L}$ является линейным подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Согласно теореме 3.1, линейная оболочка векторов $\{(a - 3b; -b; a + b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ является искомым подпространством $\mathbf{L}$.

Построим базис этого подпространства.

Для этого произвольным действительным переменным a и b , определяющим совокупность вектором рассматриваемой двумерной оболочки, придадим значения $\{(a = 1, b = 0), (a = 0, b = 1)\}$.

В результате получаем два линейно независимых вектора:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 0; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (-3; -1; 1).$$

Их независимость следует из того, что любая их линейная комбинация $\lambda_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \lambda_2 \bar{\mathbf{e}}_2 = (\lambda_1 - 3\lambda_2, -\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$ равна нулевому вектору $(0, 0, 0)$, только при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

В полученном базисе общий элемент $\bar{\mathbf{x}}$ оболочки $\mathbf{L}$ можно записать в виде линейной комбинации

$$\bar{\mathbf{x}} = (a - 3b; -b; a + b) = a(1; 0; 1) + b(-3; -1; 1), a, b \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, мы построили базис $\mathfrak{B}_L$ подпространства $\mathbf{L}$ с *базисными векторами*

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 0; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (-3; -1; 1).$$



Заданное множество можно представить в линейной оболочке базисных векторов $\mathbf{L} = \left\{ a\bar{\mathbf{e}}_1 + b\bar{\mathbf{e}}_2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\dim(\mathbf{L}) = 2.$$

Найдём теперь координаты вектора $\bar{\mathbf{x}} = (-11; -3; 1) \in \mathbf{L}$ в базисе подпространства $\mathbf{L}$.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} = (-11; -3; 1) = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 &\Rightarrow (-11; -3; 1) = x_1(1; 0; 1) + x_2(-3; -1; 1) \Rightarrow \\ (-11; -3; 1) &= (x_1 - 3x_2; -x_2; x_1 + x_2) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -11, \\ x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3.$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (-11; -3; 1) = -2\bar{\mathbf{e}}_1 + 3\bar{\mathbf{e}}_2.$$



Дополним базис двумерного подпространства $\mathbf{L}$ до базиса всего пространства $\mathbb{R}^3$.

Для этого надо найти любой вектор $\bar{\mathbf{e}}_3 = (x, y, z)$, который не компланарен плоскости оболочки $\mathbf{L}$, при этом вектора $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ должны быть линейно независимыми.

Т.е. $\alpha_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{0}}$, только когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Тогда однородная система линейных уравнений имеет единственное решение. Это будет выполнено, если определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}$ не равен нулю. Значения x, y и z легко подобрать. Таких значений бесконечное множество, мы возьмём наиболее простую комбинацию значений x, y и z , например, $\bar{\mathbf{e}}_3 = (0, 1, 0)$.

$$\text{В результате } \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Получили базис $\mathfrak{B}_E$ пространства $\mathbb{R}^3$, который содержит базисные вектора подпространства $\mathbf{L}$:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 0; 1), \bar{\mathbf{e}}_2 = (-3; -1; 1), \bar{\mathbf{e}}_3 = (0, 1, 0).$$

Согласно определению 3.5 двумерное линейное подпространство $\mathbf{L}$ и одномерное пространство являющееся линейной оболочкой третьего базисного $L(\bar{\mathbf{e}}_3)$ представляют прямую сумму пространства $\mathbb{R}^3$. ►



2. Показать, что многочлены $p_1(t) = 2t^2 + t + 1$, $p_2(t) = 2 - t$, $p_3(t) = t^2 + t - 1$ образуют базис пространства $\mathbb{P}_2$. Записать матрицу перехода от канонического базиса к данному и найти координаты многочлена $h(t) = -6 + 6t + 5t^2$ в этом базисе. Сделать проверку.

◀Запишем координаты заданных многочленов в каноническом базисе $\mathfrak{B}_{P_2} = \{1, t, t^2\}$ пространства $\mathbb{P}_2$.

$$\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1 = (1; 1; 2), \bar{\mathbf{f}}_2 = (2; -1; 0), \bar{\mathbf{f}}_3 = (-1; 1; 1)\}.$$

Запишем данный базис в виде многочленов

$$\mathfrak{B}_F = \{1 + t + 2t^2, 2 - t, -1 + t + t^2\}.$$

Для того чтобы данная система из трёх векторов могла быть базисом пространства $\mathbb{P}_2$, необходимо, чтобы она была линейно независимой. Тогда матрицей перехода от базиса $\mathfrak{B}_{P_2}$ к базису $\mathfrak{B}_F$ является матрица составленная из столбцов векторов $\bar{\mathbf{f}}_i$

$$\mathbf{P}_{P_2 \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \mathbf{P}_{P_2 \rightarrow F} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

Следовательно, заданные многочлены образуют базис в пространстве $\mathbb{P}_2$.



Найдём теперь координаты многочлена $h(t) = -6 + 6t + 5t^2$ в этом базисе. Применяем формулу (4.3).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{P_2 \rightarrow F}^{-1} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{P}_{P_2 \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_{P_2 \rightarrow F}^{-1} = - \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, в новом базисе координаты вектора $\bar{\mathbf{h}}$ равны $\bar{\mathbf{h}}_F = (1, -2, 3)$.

Или в виде многочлена

$$h_F(t) = f_1 - 2f_2 + 3f_3 = (1 + t + 2t^2) - 2(2 - t) + 3(-1 + t + t^2).$$

Для проверки просто раскроем скобки и приведём многочлен к базису $\mathfrak{B}_{P_2}$.

$$\begin{aligned} h_F(t) &= (1 + t + 2t^2) - 2(2 - t) + 3(-1 + t + t^2) = \\ &= (2 - 4 - 3) + (1 + 2 + 3)t + (2 + 3)t^2 = -6 + 6t + 5t^2 = h(t). \blacktriangleright \end{aligned}$$



3. В пространстве $\mathbb{V}_3$ линейный оператор $\hat{\mathbf{A}}$ — поворот по часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox .

3.1) Найти матрицу оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$.

3.2) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{x}} = (-2; 5; 1)$.

3.3) Найти ядро и образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

3.4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

3.5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{i}}) = \bar{\mathbf{i}} = (1, 0, 0),$$

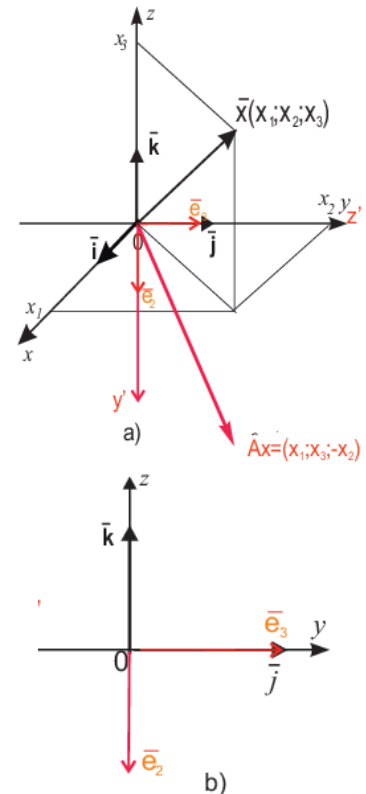
$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{j}}) = -\bar{\mathbf{k}} = (0; 0; -1),$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{k}}) = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1; 0).$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2) Найти образ вектора $\bar{\mathbf{x}} = (-2; 5; 1)$.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$



3.3) Найти ядро и образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1$, следовательно отображение является биекцией, т.е. для каждого прообраза существует только один образ и наоборот, для каждого образа существует единственный прообраз. Оператор обратим и образ оператора совпадает с пространством $\mathbb{V}_3$, а ядро состоит только из нулевого элемента.

$$\text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}, \quad \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \mathbb{V}_3, \quad \dim \hat{\mathbf{A}} = 3, \quad \text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = 0, \quad \text{Defect } \hat{\mathbf{A}} = 0.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Оператор $\hat{\mathbf{A}}$ можно записать в формулой: $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1, x_3, -x_2)$, где $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{V}_3$.



3.4) Существует ли обратный оператор? Если да, то описать его действие.

$\det A = 1$, следовательно обратный оператор существует. Легко найти обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Оператор $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ можно записать в стандартном виде:
 $\hat{\mathbf{A}}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1, -x_3, x_2)$, где $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{V}_3$. Действием обратного оператора является поворот произвольного вектора $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}^3$ против часовой стрелки на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox .



3.5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Составим характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A}_\alpha - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решаем это уравнение $(1 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$.

В действительной области имеется только одно собственное значение $\lambda = 1$.

Для определения собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda = 1$, решаем систему

$$\begin{pmatrix} 1 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Общее решение данной системы записываем в виде:

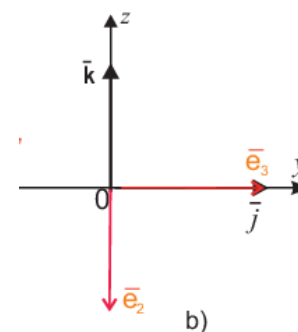
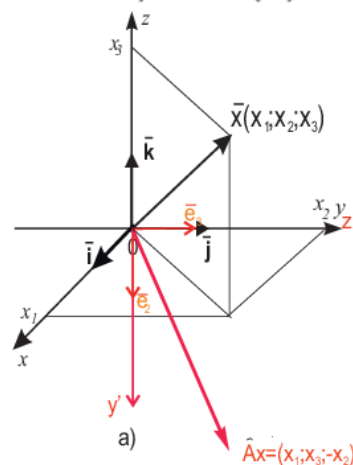
$x_1 = c, x_2 = x_3 = 0$, где $c \in \mathbb{R}$.

Таким образом, любой вектор $\bar{\mathbf{y}} = (c; 0; 0) \forall c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ является собственным вектором оператора $\hat{\mathbf{A}}$ с собственным значением $\lambda = 1$.



Проверка:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Замечание. Из геометрических соображений, следует, что при повороте на угол $\pi/2$ вокруг оси Ox , все векторы коллинеарные оси Ox остаются на месте, а все другие векторы поворачиваются. ►



4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ заданного матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\hat{\mathbf{A}}$ — оператор простого типа и привести его матрицу к диагональному виду. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

◀ Составим характеристическое уравнение (7.11)

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ 6 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решаем это квадратное уравнение.

$$(2 - \lambda)(-5 - \lambda) + 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1.$$

Найдём теперь собственные вектора, соответствующие найденным собственным значениям. Для этого последовательно подставляем найденные собственные значения в систему (7.10).

$$\begin{cases} (2 - \lambda_1)x_1 - 2x_2 = 0, \\ 6x_1 + (-5 - \lambda_1)x_2 = 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

1) $\lambda_1 = -2$. Подставляем это значение в систему (8.3)

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}x_2.$$



В качестве базисной переменной выберем x_1 , а свободное неизвестное x_2 примем равным $2c_1$. Получили $\bar{y}_1 = \{(c_1; 2c_1) | c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0\}$ — одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -2$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ -4c_1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}.$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

В качестве собственного базисного вектора выберем вектор $f_1 = (1; 2)$.

2) $\lambda_1 = -1$. Подставляем это значение в систему (8.3)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \quad \{ 3x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}x_2.$$

В качестве базисной переменной выберем x_1 , а свободное неизвестное x_2 примем равным $3c_2$. Получили $\bar{y}_2 = \{(2c_2; 3c_2) | c_2 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0\}$ — одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = -1$.

Проверка: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ -3c_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 3c_1 \end{pmatrix}$

В качестве собственного базисного вектора выберем вектор $f_2 = (2; 3)$.



Таким образом, базис, в котором матрица $\mathbf{A}$ диагональна, состоит из двух векторов $\mathfrak{B}_\lambda = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 2), \bar{\mathbf{e}}_2 = (2; 3)\}$, а сама матрица оператора в этом базисе равна

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{I \rightarrow \lambda}$ состоит из столбцов базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_1$ и $\bar{\mathbf{e}}_2$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В условии задачи записано, проверить полученный результат. Для проверки используем формулу перехода линейного оператора к новому базису, которая выводилась в предыдущей лекции.

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получили тот же результат. ►



5. В каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$ оператор $\hat{A}$ действует по правилу: $\hat{A}\bar{x} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3)$.

- 1) Показать, что $\hat{A}$ линейный оператор.
- 2) Найти матрицу оператора в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^3$.
- 3) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
- 4) Обратим ли оператор? Если да, то указать явный вид обратного оператора.
- 5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$.
- 6) Является ли оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то указать базис из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе.



$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3).$$

◀5.1) Докажем, что это преобразование является линейным. Для этого надо доказать, что для произвольных $\bar{\mathbf{x}} = (x_1; x_2; x_3)$ и $\bar{\mathbf{y}} = (y_1; y_2; y_3) \in \mathbb{R}^3$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, выполняются оба условия линейности операторов:

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}} \text{ и } \hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}) = \alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) &= (4(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3); -(x_1 + y_1) + 5(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3); \\ &\quad -2(x_1 + y_1) + 6(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3)) = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; \\ &\quad -2x_1 + 6x_2 - 2x_3) + (4y_2 - 2y_3; -y_1 + 5y_2 - 2y_3; -2y_1 + 6y_2 - 2y_3) = \\ &= \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\alpha\bar{\mathbf{x}}) &= (4\alpha x_2 - 2\alpha x_3; -\alpha x_1 + 5\alpha x_2 - 2\alpha x_3; -2\alpha x_1 + 6\alpha x_2 - 2\alpha x_3) = \\ &= \alpha(4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3) = \alpha\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Оба условия выполняются, следовательно, оператор $\hat{\mathbf{A}}$ является линейным.



$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3).$$

5.2) Получим матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$:
 $\mathfrak{B}_I = \left\{ \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} = (1; 0, 0), \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{j}} = (0; 1, 0), \bar{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{k}} = (0; 0, 1) \right\}.$

Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\hat{\mathbf{A}}$ к базисным векторам $\mathfrak{B}_I$:
 $\hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_1 = (0; -1; -2), \quad \hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_2 = (4; 5; 6), \quad \hat{\mathbf{A}}_1\bar{\mathbf{e}}_3 = (-2; -2; -2).$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$



$$\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3).$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

5.3) Найти ядро и образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ равен нулю, так определитель равен нулю.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, оператор не обратим и пункт 4) пропускаем.

ядром $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}}$ линейного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ называется множество тех векторов $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$, для которых $\hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

Так как определитель матрицы $\mathbf{A}_2$ равен нулю, следовательно система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ имеет бесконечное множество решений.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 2.



Запишем упрощённую систему в стандартном виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = 0,5x_3. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1 и x_2 , а в качестве свободной — x_3 .

Придаём свободной неизвестной x_3 произвольные значения $2c \in \mathbb{R}$, получаем общее решение однородной системы

$$(x_1, x_2, x_3) = \{(c, c, 2c) | c \in \mathbb{R}\}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверим полученное решение

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, ядром оператора $\hat{\mathbf{A}}$ является одномерное линейное подпространство векторов $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\mathbf{x}} = (c; c; 2c), c \in \mathbb{R}\}$.

$$\dim \text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = 1.$$

Найдём теперь образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_2 - 2x_3 \\ -2x_3 + 5x_2 - x_1 \\ -2x_3 + 6x_2 - 2x_1 \end{pmatrix}$$



Следовательно,
 $\text{Im } \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 | \bar{\mathbf{x}} = (4x_2 - 2x_3; -x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 6x_2 - 2x_3)\}.$
 $\dim \text{Im } \hat{\mathbf{A}} = 2.$

5.5) Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{\mathbf{A}}$.

Составим характеристическое уравнение (7.11) и решаем его

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & -2 \\ -1 & 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 6 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & -2 \\ -1 + \lambda & 1 - \lambda & 0 \\ -2 + \lambda & 2 & -\lambda \end{vmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ \lambda - 2 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ \lambda - 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda - 1) \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda - 2 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (\lambda - 1)(-2(2 - \lambda - 2) - \lambda(\lambda - 4)) = \lambda(\lambda - 1)(2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Получили три различных собственных значения:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 2.$$



Найдём теперь собственные вектора, соответствующие найденным собственным значениям. Для этого последовательно подставляем найденные собственные значения в систему (7.10).

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (5 - \lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - (2 + \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$. Подставляем это значение в систему (8.4)

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0, \\ -4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = 0,5x_3. \end{cases}$$

Получили $\bar{\mathbf{y}}_1 = \{(c_1; c_1; 2c_1) | c_1 \in \mathbb{R}, c_1 \neq 0\}$ — одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного базисного вектора выберем вектор $f_1 = (1; 1; 2)$.



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$. Подставляем это значение в систему (8.4)

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0,5x_3. \end{cases}$$

В качестве базисных переменных выберем x_1 и x_2 , а свободное неизвестное x_3 примем равным $2c_2$.

Получили $\bar{\mathbf{y}}_2 = \{(0; c_2; 2c_2) | c_2 \in \mathbb{R}, c_2 \neq 0\}$ — одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix}$$

В качестве собственного базисного вектора выберем вектор $f_2 = (0; 1; 2)$.



$\lambda_3 = 2$. Подставляем это значение в систему (8.4)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

Получили $\bar{\mathbf{y}}_3 = \{(c_3; c_3; c_3), |c_3 \in \mathbb{R}, c_3 \neq 0\}$ — одномерное многообразие собственных векторов соответствующих собственному значению $\lambda_3 = 2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_3 \\ 2c_3 \\ 2c_3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} c_3 \\ c_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

В качестве собственного базисного вектора выберем вектор $f_2 = (1; 1; 1)$.

Следовательно, оператор $\mathbf{A}$ является *оператором простого типа*. Выпишем базис из полученных собственных векторов

$$\mathfrak{B}_\lambda = \{f_1, f_2, f_3\} = \{(1; 1; 2), (0; 1; 2), (1; 1; 1)\}.$$

В этом базисе матрица оператора $\hat{\mathbf{A}}$ равна $\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. ►



РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Лекция 9

Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

1 апреля 2023г