

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика и
программирования



Лекция 9

Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве

Берков Николай Андреевич

8 апреля 2023г

Пример 6.2. Оператор $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ переводит произвольный элемент $\bar{x} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, заданный в каноническом базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{i}, \bar{j}\}$, в пространства $\mathbb{R}^3$, по правилу: $\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3$;

- 1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$.
- 2) Проверить обратимость оператора $\hat{A}$.
- 3) Найти образ вектора $\bar{c} = (-1; 3)$.
- 4) Найти прообразы векторов $\bar{d} = (3; -1; 1)$ и $\bar{f} = (1; 1; 1)$.
- 5) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$.
- 6) Найти базис подпространства $\text{Im } \hat{A}$ и дополнить его до $\mathbb{R}^3$.

◀ Легко показать, что оператор $\hat{A}$ являются линейными. Т.к. для произвольных $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, выполняются оба условия линейности операторов: $\hat{A}(\bar{x} + \bar{y}) = \hat{A}\bar{x} + \hat{A}\bar{y}$ и $\hat{A}(\alpha\bar{x}) = \alpha\hat{A}\bar{x}$, см. решение примера 5.8.



1) Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$.

$$\hat{A}(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3;$$

2) Проверить обратимость оператора $\hat{A}$.

1) Получим матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$:

$$\mathfrak{B}_I = \left\{ \bar{e}_1 = \bar{i} = (1; 0), e_2 = \bar{j} = (0; 1) \right\}.$$

Найдём образы базисных векторов. Для этого применим оператор $\hat{A}$ к базисным векторам:

$$\hat{A}\bar{e}_1 = \hat{A}(1; 0) = (1; 1; 2), \quad \hat{A}\bar{e}_2 = \hat{A}(0; 1) = (2; -2; -1).$$

Выпишем матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\mathfrak{B}_I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Очевидно, что отображение не является биекцией, следовательно оператор необратим.

Напоминание. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется **биективным**, если каждый элемент из множества X отображается только в один элемент множества Y и каждый элемент множества Y имеет только один прообраз.



$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3;$$

3) Найдём образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3)$ по формуле $\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}}$ или $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{C}$ — матрицы-столбцы векторов $\bar{\mathbf{y}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, соответственно.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{c}} = (-1 + 6; -1 - 6; -2 - 3) = (5; -7; -5).$$

Ответ: образ вектора $\bar{\mathbf{c}} = (-1; 3)$ равен $\bar{\mathbf{y}} = (5; -7; -5)$.



$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3;$$

4) Найти прообразы векторов $\bar{\mathbf{d}} = (3; -1; 1)$ и $\bar{\mathbf{f}} = (1; 1; 1)$.

Решаем ОСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ и $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F}$, где $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$ — матрицы столбцы векторов $\bar{\mathbf{d}}$ и $\bar{\mathbf{f}}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ -4x_2 = -4, \\ -5x_2 = -5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Получили $\bar{\mathbf{r}} = (1; 1)$ — прообраз вектора $\bar{\mathbf{d}} = (3; -1; 1)$.

Проверка: $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}) = (1 + 2; 1 - 2; 2 - 1) = (3; -1; 1)$. Или

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3;$$

4) Найти прообразы векторов $\bar{\mathbf{d}} = (3; -1; 1)$ и $\bar{\mathbf{f}} = (1; 1; 1)$.

Найдём прообраз вектора $\bar{\mathbf{f}}$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 1, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ -4x_2 = 0, \\ -5x_2 = -1. \end{cases}$$

Система несовместна, так как ранг основной матрицы системы не равен рангу расширенной матрицы. Следовательно, прообраз вектора $\bar{\mathbf{f}}$ не существует. Т.е. ни один вектор из $\mathbb{R}^2$ не отображается оператором $\hat{\mathbf{A}}$ в вектор $\bar{\mathbf{f}} = (1; 1; 1)$.



5) Найти ядро и образ оператора $\hat{\mathbf{A}}$. $\hat{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}) = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^3;$

Решаем ОСЛАУ $\mathbf{A}\mathbf{X} = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ -4x_2 = 0, \\ -5x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\text{Ker } \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{0}}\}$.

$$\text{Im } \hat{\mathbf{A}} = \{\bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{x}} = (x_1 + 2x_2; x_1 - 2x_2; 2x_1 - x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Согласно теоремы 6.3, данное множество является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^3$. Найдём базис этого подпространства.

$$\mathfrak{B}_{\text{Im } \hat{\mathbf{A}}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1 = (1; 1; 2), \bar{\mathbf{e}}_2 = (2; -2; -1)\}.$$

Дополним его до базиса $\mathbb{R}^3$. Для этого добавим вектор $\bar{\mathbf{e}}_2 = (1; 0; 0)$ и проверим, невырожденность полученной матрицы перехода

$$\mathbf{P}_{I \Rightarrow \mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det \mathbf{A} = 3 \neq 0$. Следовательно, система векторов

$\{(1; 1; 2), (2; -2; -1), (1; 0; 0)\}$ составляет базис пространства $\mathbb{R}^3$, причём $\mathbb{R}^3 = \text{Im } \hat{\mathbf{A}} \oplus \bar{\mathbf{e}}_3$. ▶



Определение 9.1. Числовая функция¹ $B(\bar{x}, \bar{y})$, аргументами которой являются произвольные векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ линейного пространства V , называется билинейной формой (билинейным функционалом), если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$ и любого действительного числа α выполняется следующие соотношения, называемые аксиомами билинейной формы:

$$(1) B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{z}) + B(\bar{y}, \bar{z});$$

$$(2) B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{x}, \bar{z});$$

$$(3) B(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha B(\bar{x}, \bar{y});$$

$$(4) B(\bar{x}, \alpha \bar{y}) = \alpha B(\bar{x}, \bar{y}).$$

Иными словами, билинейная форма или билинейный функционал $B(\bar{x}, \bar{y})$ представляет собой числовую функцию двух аргументов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, определённую на всевозможных векторах $\bar{x}$ и $\bar{y}$ вещественного линейного пространства V и линейную по каждому из этих аргументов.

¹Это отображение $B : V \times V \rightarrow R$, любой упорядоченной паре упорядоченных векторов $(\bar{x}, \bar{y})$ пространства V ставит в соответствие некоторое действительное число $B(\bar{x}, \bar{y})$



Определение 9.2. Билинейная форма $B(\bar{x}, \bar{y})$ называется симметричной (кососимметричной), если для любых $\bar{x}, \bar{y} \in V$ выполняется условие $B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{y}, \bar{x})$ ($B(\bar{x}, \bar{y}) = -B(\bar{y}, \bar{x})$).

$$(1) B(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{z}) + B(\bar{y}, \bar{z}).$$

$$(2) B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{x}, \bar{z}).$$

$$(3) B(\alpha \bar{x}, \bar{y}) = \alpha B(\bar{x}, \bar{y});$$

$$(4) B(\bar{x}, \alpha \bar{y}) = \alpha B(\bar{x}, \bar{y}).$$

Пример 9.1. Скалярное произведение двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ является симметричной билинейной формой. Это следует из свойств скалярного произведения. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$, $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$.
Если $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$, то $B(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Пример 9.2. Симметричной билинейной формой в пространстве $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является отображение

$$B(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt \quad \forall f(t), g(t) \in C[a, b].$$



Определение 9.3. Пусть $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ – базис линейного пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ билинейная форма в $\mathbb{V}$. Обозначим $a_{ij} = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j), i, j = 1, 2, \dots, n$.

Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_1) & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей билинейной формы в базисе $\mathfrak{B}_E$.

Рассмотрим два вектора из $\mathbb{V}_2$:

$\bar{\mathbf{x}} = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2$ и $\bar{\mathbf{y}} = y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2$ заданные в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2\}$.

Используя линейность функционала по обоим переменным, получаем

$$\begin{aligned} B(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) &= \mathbf{B}(x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2) = \mathbf{B}(x_1\bar{\mathbf{e}}_1, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2) + \\ &+ \mathbf{B}(x_2\bar{\mathbf{e}}_2, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2) = x_1\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2) + x_2\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_2, y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2) = \\ &= x_1(y_1\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) + y_2\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2)) + x_2(y_1\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_1) + y_2\mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_2)) = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_iy_j. \end{aligned}$$



Обобщим эту формулу для любых векторов

$$\bar{x} = x_1\bar{\mathbf{e}}_1 + x_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + x_n\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{y} = y_1\bar{\mathbf{e}}_1 + y_2\bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + y_n\bar{\mathbf{e}}_n \in \mathbb{V}.$$

В силу линейности билинейной формы $B(\bar{x}, \bar{y})$ получаем

$$\begin{aligned} B(\bar{x}, \bar{y}) &= \mathbf{B} \left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B} \left(x_i \bar{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{\mathbf{e}}_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{B} \left(\bar{\mathbf{e}}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

Теорема 9.1. (о представлении билинейной формы).

Билинейная форма $\mathbf{B}(\bar{x}, \bar{y})$ в заданном базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ однозначно определяется в виде

$$\mathbf{B}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (9.1)$$

где $a_{ij} = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_i, \bar{\mathbf{e}}_j)$, а x_i, y_j — координаты векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно.



Очевидно, что симметричной билинейной форме соответствует симметричная, а кососимметричной — кососимметричная матрица.

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

Пример 9.3. Найти матрицу билинейной формы заданной функцией в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 - 3x_3 y_2 + 6x_1 y_3 + 4x_2 y_2 - 6x_2 y_3 - 9x_3 y_1 + 8x_2 y_1.$$

Сгруппируем члены билинейной формы

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = x_1(y_1 + 0y_2 + 6y_3) + x_2(8y_1 + 4y_2 - 6y_3) + x_3(-9y_1 - 3y_2 + 0y_3).$$

Получили матрицу заданной билинейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \\ -9 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$



9.1. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису

Теорема 9.2. (о матрице билинейной формы в новом базисе)

Пусть $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ — два базиса линейного пространства $\mathbb{V}$. Тогда матрицы билинейной формы в этих базисах связаны соотношением

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}, \quad (9.2)$$

где $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$, $\mathbf{A}_E, \mathbf{A}_F$ — матрицы билинейной формы в базисах $\mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F$ соответственно.

► Обозначим через $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ координаты столбцов векторов $\bar{\mathbf{x}} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + x_n \bar{\mathbf{e}}_n$ и $\bar{\mathbf{y}} = y_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_n \bar{\mathbf{e}}_n$ в базисе $\mathfrak{B}_E$.

Тогда выражение (9.1) можно представить как произведение трёх матриц

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \mathbf{X}^T \mathbf{A}_E \mathbf{Y}.$$

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (9.1)$$



Теорема 9.2. (о матрице билинейной формы в новом базисе)

Пусть $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ и $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$ — два базиса линейного пространства $\mathbb{V}$. Тогда матрицы билинейной формы в этих базисах связаны соотношением

$$\mathbf{A}_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}, \quad (9.2)$$

где $\mathbf{P}_{E \rightarrow F}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}_E$ к базису $\mathfrak{B}_F$, $\mathbf{A}_E, \mathbf{A}_F$ — матрицы билинейной формы в базисах $\mathfrak{B}_E, \mathfrak{B}_F$ соответственно.

Применяем формулу (4.4) преобразования координат при переходе к новому базису $\mathfrak{B}_F$, которая была получена в лекции 4.

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}' \quad \mathbf{Y} = \mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{Y}',$$

где $\mathbf{X}', \mathbf{Y}'$ координаты векторов в новом базисе $\mathfrak{B}_F$.

Подставляем эти выражения и применяя свойство произведения матриц $(AB)^T = B^T A^T$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{A}_E \mathbf{Y} = (\mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{X}')^T \mathbf{A}_E (\mathbf{P}_{E \rightarrow F} \mathbf{Y}') = \\ &= \mathbf{X}'^T (\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}) \mathbf{Y}' = \mathbf{X}'^T \mathbf{A}_F \mathbf{Y}'. \Rightarrow \\ \mathbf{X}'^T (\mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}) \mathbf{Y}' &= \mathbf{X}'^T \mathbf{A}_F \mathbf{Y}' \quad \Rightarrow \\ \mathbf{A}_F &= \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T \mathbf{A}_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}. \blacktriangleright \end{aligned}$$



Определение 9.4. Рангом билинейной формы называется ранг её матрицы вычисленный в некотором базисе.

Пример 9.4. Вычислите ранг билинейной формы зависящей от параметра α :

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 9x_1y_3 + 4x_2y_1 + 8x_2y_2 + 12x_2y_3 + 2x_3y_1 + 7x_3y_2 + \alpha x_3y_3.$$

► Выпишем матрицу заданной билинейной формы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 12 \\ 2 & 7 & \alpha \end{pmatrix}$$

Для вычисления ранга матрицы A выполним преобразования не изменяющие ранг матрицы. Первую строку делим на 3. Из второй и третьей строки вычтем полученную первую умноженную на 4 и 2 соответственно. Вычеркнем нулевую строку. В результате получаем матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & \alpha - 6 \end{vmatrix}$$

Её ранг равен не зависит от параметра α и равен 2. $\text{rang}(A) = 2.$ ◀

Ответ: $\text{rang}(B(\bar{x}, \bar{y})) = 2.$



Определение 9.5. Билинейная форма $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$ называется **вырожденной** (**невырожденной**), если её ранг меньше (равен) размерности пространства.

Теорема 9.4. Билинейная форма симметричная тогда и только тогда, когда её матрица симметричная.

◀ Пусть билинейная форма симметричная
 $\Rightarrow \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_i; \bar{\mathbf{e}}_j) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_j; \bar{\mathbf{e}}_i) \Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$ матрица B – симметричная.

Теперь пусть матрица B – симметричная $\Rightarrow b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$
 $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{Y})^T = \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{X} = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{x}}) \Rightarrow$
 $\mathbf{B}$ – симметричная билинейная форма. ►



Квадратичная форма

Определение 9.6. Пусть $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — симметричная билинейная форма в n -мерном линейном пространстве $\mathbb{V}$. **Квадратичной формой** называется функционал $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$.

Определение 9.7. Симметричная билинейная форма $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ называется **полярной** квадратичной форме $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$.

Из определения квадратичной формы вытекает

$$\varphi(\alpha \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\alpha \bar{\mathbf{x}}, \alpha \bar{\mathbf{x}}) = \alpha^2 \varphi(\bar{\mathbf{x}}), \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Теорема 9.4. Для любой квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ существует единственный полярная к ней билинейная форма $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$, такая, что

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}). \quad (9.3)$$



Определение 9.8. Матрицей квадратичной формы $\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ называется матрица полярной к ней билинейной квадратичной форме $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}})$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_1) & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_1) & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_2) & \dots & \mathbf{B}(\bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{e}}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

A — симметричная матрица.

Квадратичную форму можно представить в виде билинейного многочлена

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (9.5)$$

Квадратичная форма в трёхмерном линейном пространстве с базисом $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$ имеет вид

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

Квадратичную форму можно представить в виде произведения трёх матриц

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}^T A \mathbf{X}, \quad (9.6)$$

где $\mathbf{X}$ — матрица-столбец вектора $\bar{\mathbf{x}}$.



Определение 9.9. Ранг квадратичной формы $\varphi(\bar{x})$ — это ранг её матрицы.

Определение 9.10. Если $\text{rang } \varphi(\bar{x}) = n = \dim \mathbb{V}_n$, то квадратичная форма называется невырожденной.

Если $\text{rang } \varphi(\bar{x}) < n$, то квадратичная форма называется вырожденной.

Пример Квадратичная форма $\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 6x_1x_3$ имеет матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Так как $\text{rang } A = 2 < 3$, данная квадратичная форма является вырожденной.



Пример 9.5. Представить квадратичную форму $\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ в виде произведения трёх матриц (9.6).

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleleft \varphi(\bar{\mathbf{x}}) &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = \\
 &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\
 &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_2 - 4x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 - 5x_3 \end{pmatrix} = \\
 &= x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 5x_3^2 = \\
 &= x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3. \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Если необходимо перейти к новому базису $\mathfrak{B}_F = \{\bar{\mathbf{f}}_1, \bar{\mathbf{f}}_2, \dots, \bar{\mathbf{f}}_n\}$, то квадратичная форма преобразуется по формуле для билинейной формы (9.2)

$$A_F = \mathbf{P}_{E \rightarrow F}^T A_E \mathbf{P}_{E \rightarrow F}. \quad (9.7)$$

Квадратичная форма представляет собой однородный многочлен второй степени от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.



Пример 9.6. Составить матрицу билинейной формы и $B(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_2 - 5x_1y_3 + 8x_2y_3 + 2x_2y_1 - 5x_3y_1 + 8x_3y_2 + 4x_3y_3$ и записать соответствующую ей квадратичную форму.

► Перегруппируем слагаемые в порядке возрастания индексов x , а затем — y .

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = x_1(2y_2 - 5y_3) + x_2(2y_1 + 8y_3) + x_3(-5y_1 + 8y_2 + 4y_3).$$

Выпишем матрицу билинейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 8 \\ -5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Получили симметричную матрицу, следовательно можно написать квадратичную форму. Для этого значения коэффициентов стоящие выше диагонали удваиваем и в сумму для квадратичной формы записываем их и члены стоящие на главной диагонали.

$$\varphi(\bar{x}) = 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 16x_2x_3 + 4x_3x_3. \blacktriangleleft$$



Пример 9.7. Восстановить симметричную билинейную форму по квадратичной форме $\varphi(\bar{x}) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 12x_1x_3 + 5x_2^2 - 18x_2x_3 + 7x_3^2$ и составить её матрицу.

► Матрица квадратичной формы совпадает с матрицей полярной к квадратичной форме симметричной билинейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \\ -1 & 5 & -9 \\ -6 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

По полученной матрице записываем билинейную форму

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - 6x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 - 9x_2y_3 - 6x_3y_1 - 9x_3y_2 + 7x_3y_3. \blacktriangleleft$$



Пример 9.8. Квадратичная форма задана в каноническом базисе $\mathfrak{B}_I = \{\bar{\mathbf{i}}, \bar{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{k}}\}$

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Получить квадратичную форму в базисе $\mathfrak{B}_E = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3\}$:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{i}} - \bar{\mathbf{k}}, \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = -\bar{\mathbf{i}} + 2\bar{\mathbf{j}} - \bar{\mathbf{k}}, \quad \bar{\mathbf{e}}_3 = -\bar{\mathbf{j}} + \bar{\mathbf{k}}.$$

► Матрица квадратичной формы в базисе $\mathfrak{B}_I$

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода из базиса $\mathfrak{B}_I$ в базис $\mathfrak{B}_E$

$$P_{I \rightarrow E} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Матрица $\mathbf{A}_E$ в новом базисе $\mathfrak{B}_E$ вычисляется по формулам (9.7)
 $\mathbf{A}_E = \mathbf{P}_{I \rightarrow E}^T \mathbf{A}_I \mathbf{P}_{I \rightarrow E}$.

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_I \mathbf{P}_{I \rightarrow E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{A}_E = \mathbf{P}_{I \rightarrow E}^T \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Запишем полученную квадратичную форму
 $\varphi_E(\overline{\mathbf{x}}) = -8x_1^2 + 8x_1x_3 - 4x_2^2 + 4x_2x_3 - 3x_3^2$. ►



Задача 1.

Квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ в некотором базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ пространства L_2 имеет вид

$$\varphi(\vec{x}) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 7x_2^2, \quad \forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

Написать матрицу квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в этом базисе.

Решение.

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{12}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \\ &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}.$$



Задача 2.

Восстановить билинейную форму $A(\vec{x}, \vec{y})$ по соответствующей ей квадратичной форме $\varphi(\vec{x}) = -x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

Решение. Квадратичная форма имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, которая совпадает с матрицей соответствующей билинейной формы:

$$\begin{aligned} A(\vec{x}, \vec{y}) &= (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 \Rightarrow \\ A(\vec{x}, \vec{y}) &= -x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2. \end{aligned}$$



Пример

В некотором базисе задана квадратичная форма

$$\varphi(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 6x_2x_3 - x_3^2$$

Выписать ее матрицу и найти ее значение на векторе $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\varphi(\bar{a}) = (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0 \ -1 \ -2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$$



Пример

Базис $B_1 = \{\vec{e}_1; \vec{e}_2\}$; Базис $B_2 = \{\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \vec{e}_2 - \vec{e}_1\}$;

$$\varphi_{B_1}(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2;$$

Выписать квадратичную форму в базисе B_2 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = P^T A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{B_2}(\vec{y}) = 5y_1^2 + 8y_1y_2 + 5y_2^2;$$



Пример

Квадратичную форму $\varphi(\bar{x}) = 7x_1^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_3^2$ преобразовать к новым переменным:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Запишем замену переменных в матричном виде: $X=PY$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = P^T A_1 P$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Тогда квадратичная форма принимает вид:

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$



РТУ МИРЭА

Кафедра ВМиП

Лекция 9

Билинейные и квадратичные формы в линейном пространстве

Спасибо за внимание

Берков Николай Андреевич

8 апреля 2023г

