Лекция 1. Алгебра матриц

1. Основные понятия о матрицах. Действия над матрицами. Сложение матриц; умножение матрицы на число; умножение матриц; транспонирования матриц. Основные свойства указанных операций. Представление систем линейных алгебраических уравнений в матричном виде.

1.1. Матрицы

Определение 1.1. ***Матрицей*** *размером* $[m \times n]$ *называется прямоугольная таблица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

составленная из m *строк и* n *столбцов, заполненная некоторыми значениями* a_{ij} *произвольного типа.*

Значения ячеек таблицы (матрицы) называются элементами матрицы и обозначаются символами a_{ij} . Горизонтальный ряд значений называется строкой, а вертикальный – столбцом матрицы. Первый индекс i – номер строки ($i = 1, 2, ..., m$) , второй j – номер столбца ($j = 1, 2, ..., n$) . Матрицу принято обозначать заглавными латинскими буквами: $A,\ B,\ C, \dots, Z,\ A_1,\ A_2, \dots$ и т.д.

Более кратко матрицу задают в виде

$$A = (a_{ij}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.2}$$

Приведем основные определения, которые будем использовать в дальнейшем.

1. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов ($m \neq n$), называется `прямоугольной`.

   Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ является прямоугольной матрицей размером 2×3 .

2. Матрица, в которой число строк равно числу столбцов ($m = n$), называется `квадратной`. При этом число её строк или столбцов называется порядком матрицы.

Матрица $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей 2-го порядка.

Матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ является квадратной матрицей 3-го порядка.

3. Последовательность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами ($i = j$) называется `главной диагональю` матрицы $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

4. Если в квадратной матрице все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то матрица называется `диагональной`

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5. Квадратная диагональная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, называется `единичной матрицей` и обозначается буквой E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Квадратная матрица, в которой все элементы расположенные ниже или выше главной диагонали равны нулю, называется `треугольной` матрицей.

7. Квадратная матрица, в которой все элементы равны нулю, называется `нулевой` матрицей. Нулевую матрицу будем обозначать символом $\mathbb{O}$.

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Квадратная матрица, в которой все элементы расположенные выше главной диагонали равны нулю, называется `нижнетреугольной` матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

9. Квадратная матрица, в которой все элементы расположенные ниже главной диагонали равны нулю, называется `верхнетреугольной` матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

10. Матрица, состоящая только из одной строки, называется `матрицей-строкой`

$$A = (a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n}).$$

11. Матрица, состоящая только из одного столбца, называется `матрицей-столбцом`.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

12. Матрица B называется `транспонированной` по отношению к матрице A, если она получена из матрицы A заменой строк этой матрицы её столбцами, и, наоборот, столбцов строками. Транспонированная матрица обозначается A^T.

    Например, по отношению к матрице

    $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ транспонированной будет матрица

    $$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

13. Квадратная матрица A n-го порядка, элементы которой удовлетворяют условию: $a_{i\,j} = a_{j\,i}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется **симметрической** матрицей.

    Для симметрической матрицы выполняется равенство
    $A^T = A$.

14. Квадратная матрица A n-го порядка, элементы которой удовлетворяют условию: $a_{i\,j} = -a_{j\,i}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется **кососимметрической** (**антисимметрической**) матрицей.

    Для кососимметрической матрицы выполняется равенство
    $A^T = -A$, кроме того, диагональные элементы кососимметрической матрицы обязаны быть равны нулю.

1.2. Действия над матрицами

Определение 1.2. *(**Равенство матриц.**) Две матрицы A и B называются **равными** ($A = B$), если они имеют одинаковое число строк и одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны, $a_{ij} = b_{ij}$.*

Определение 1.3. *(**Сложение матриц.**) **Суммой** $A+B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $(m \times n)$ называется матрица $C = (c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:*

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.3}$$

Пример 1.1. *Найти сумму двух матриц* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 30 & 50 & 70 \end{pmatrix}$.

$$◀\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 40 & 60 \\ 10 & 30 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 42 & 63 \\ 14 & 35 & 76 \end{pmatrix}. ▶$$

При сложении матриц выполняется переместительный и сочетательный закон:

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Нуль-матрица $\mathbb{O}$ выполняет роль обычного нуля при сложении чисел:

$$A + \mathbb{O} = A.$$

Определение 1.4. ***Произведением*** *матрицы $A = (a_{ij})$ на действительное число α называется матрица $B = (b_{ij})$ полученная умножением всех элементов матрицы A на число α:*

$$B = A \cdot \alpha = \alpha \cdot A, \quad b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}. \tag{1.4}$$

Пример 1.2. *Умножить матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ *на число 5.*

$$◀ 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}. ▶$$

При умножении любой матрицы на нуль получается нуль-матрица.

Определение 1.5. ***Линейной комбинацией*** *двух матриц одинакового размера* $(m \times n)$ $\alpha A + \beta B$, *где* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, α *и* $\beta \in \mathbb{R}$, *называется матрица* $C = (c_{ij})$ *того же размера, каждый элемент которой равен* $c_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta b_{ij}$.

Пример 1.3. *Даны две матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *и* $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Найти матрицу* $3A - 2B$.

$$◀ 3A - 2B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 11 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}. ▶$$

Теперь перейдём к более сложному определению произведения двух матриц $A \cdot B$.

Определение 1.6. ***Произведением двух матриц*** *– матрицы* $A = (a_{is})$ *размера* $m \times n$ *на матрицу* $B = (b_{sj})$ *размера* $n \times k$ *– называется матрица* $C = (c_{ij})$ *размера* $m \times k$ *каждый элемент которой определяется выражением*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}. \tag{1.5}$$

Как видно из определения произведения двух матриц A и B, перемножить можно лишь матрицы, у которых число столбцов матрицы сомножителя A равно числу строк матрицы сомножителя B.

Например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$, то

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}.$$

В результате перемножения двух матриц $A \cdot B$ получается матрица C, содержащая столько строк, сколько их имеет матрица A, и столько столбцов, сколько их имеет матрица B.

Рассмотрим примеры умножения матриц.

Пример 1.4.

$$◀ \; AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 1\cdot 3 \\ 3\cdot 1 - 2\cdot 2 & +3\cdot(-1) - 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 - 1\cdot 3 & 1\cdot 1 - 1\cdot(-2) \\ 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}. \; ▶$$

Замечание 1.1. *Из этих примеров видно, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону:*

$$AB \neq BA.$$

Определение 1.7. *Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются коммутативными.*

Легко проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному закону

$$A(BC) = (AB)C$$

и распределительному закону

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Замечание 1.2. *Как известно, произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц подобное обстоятельство может и не иметь место, т. е. произведение двух не нулевых матриц может оказаться равным нуль-матрице.*

Отметим интересный факт. Очевидно, что произведение двух отличных от нуля действительных чисел не равно нулю. А вот для матриц данное свойство не всегда выполняется.

Пример 1.5. *Умножить матрицу* $A = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix}$ *на матрицу* $B = \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$◀ \; AB = \begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ab & ab - ab \\ -ab + ab & -ab + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \; ▶$$

Пример 1.6. *Найти AB и BA, где* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$$◀ \ AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = (1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8) = (70).$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 & 5\cdot 4 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 & 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 & 7\cdot 2 & 7\cdot 3 & 7\cdot 4 \\ 8\cdot 1 & 8\cdot 2 & 8\cdot 3 & 8\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 \\ 6 & 12 & 18 & 24 \\ 7 & 14 & 21 & 28 \\ 8 & 16 & 24 & 32 \end{pmatrix}. \ ▶$$

Используя введенные матричные операции можно возводить квадратную матрицу A в натуральную степень и вычислять линейную комбинацию квадратных матриц состоящих их матриц A^k, $k \in \mathbb{N}$. $f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 E$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Пример 1.7. *Найти A^4, где* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

◀$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A = (A \cdot A) \cdot (A \cdot A) = A^2 \cdot A^2$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1+2 \\ -2-4 & -2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$. ▶

Пример 1.8. *Найти $f(A) = A^6 - 4 \cdot A^4 + 2A^2 - A + 4E$, где* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

◀Воспользуемся результатами предыдущего примера. Найдём
$A^6 = A^4 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 1-6 \\ 6+4 & 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$.

Находим теперь линейную комбинацию четырёх матриц: A^6, A^4, A^2, A и единичной матрице E.

$$f(A) = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7+4-2-1+4 & -5-12-2+1 \\ 10+24+4-2 & 2-8-4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 36 & -6 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Свойства матричных операций

Пусть квадратные матрицы A, B и C имеют одинаковый порядок и λ и $\mu \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что алгебраические операции с матрицами обладают следующими свойствами:

$$
\begin{array}{ll}
1) A+B=B+A; & 2) A+(B+C)=(A+B)+C; \\
3) A+\mathbb{O}=\mathbb{O}+A=A; & 4) (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A; \\
5) \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B; & 6) (\lambda\mu)A=\lambda(\mu A); \\
7) A(B+C)=AB+AC; & 8) (A+B)C=AC+BC; \\
9) A(BC)=(AB)C. &
\end{array}
$$

Отметим без доказательства некоторые свойства операции транспонирования.

Свойство операции транспонирования.

$$
\begin{array}{ll}
1) (A^T)^T=A; & 2) (A+B)^T=A^T+B^T; \\
3) (AB)^T=B^TA^T; & 4) (\lambda A)^T=\lambda A^T; \\
5) (\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T. &
\end{array}
$$

Свойство единичной матрицы.

Для любой квадратной матрицы порядка n и единичной матрицы того же порядка справедливы равенства

$$AE=EA=A.$$

Если прямоугольная матрица имеет размерность $m\times n$, а единичная матрица имеет порядок n,то

$$AE=A.$$

Если прямоугольная матрица имеет размерность $m\times n$, а единичная матрица имеет порядок m, то

$$EA=A.$$

Например, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\0&2\end{pmatrix}$. $AE=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\0&2\end{pmatrix}=A,$

или $EA=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\\0&2\end{pmatrix}=A.$

1.3. Матричная форма записи систем линейных уравнений

Широкое применение матрицы получили при решении систем линейных алгебраических уравнений. Пусть A – произвольная действительная матрица размерностью $m \times n$(1.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и матрицы-столбцы X и B размерностью $n \times 1$ и $m \times 1$ соответственно

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда запись $AX = B$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Используя определения равенств двух матриц, полученное равенство можно записать в виде системы m уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.6}$$