

Лекция 8. Скалярное произведение

Выше было определено произведение вектора на число. Далее мы определим несколько операций умножения вектора на вектор.

Определение 8.1. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (8.1)$$

Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по определению равно нулю.

Замечание 8.1. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается либо центральной точкой между векторами: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, либо с помощью круглых скобок: $(\vec{a}, \vec{b})$.

В соответствии с формулой (7.4) $\text{Пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi$, поэтому подставив это выражение в формулу (8.1), получим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_a \vec{b}$, откуда:

$$\text{Пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \quad (8.2)$$

8.1. Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативный закон)

Действительно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$ (ассоциативный закон).

Действительно, например, при $\lambda > 0$: $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

3. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивный закон).

Действительно, используя формулу (8.2) и свойства проекций, получаем: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_a(\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|(\text{Пр}_a \vec{b} + \text{Пр}_a \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_a \vec{b} + |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_a \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

4. Для того чтобы два ненулевых вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю:

$$\vec{a} \perp \vec{b}, \quad |\vec{a}| \neq 0, \quad |\vec{b}| \neq 0 \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (8.3)$$

Действительно, если $\bar{a} \perp \bar{b}$, то угол $\varphi = \widehat{(\bar{a}; \bar{b})} = 90^\circ \implies \cos \varphi = 0$ и $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = 0$. Наоборот, если $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, то $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = 0 \implies$ один из сомножителей равен нулю. Так как $|\bar{a}| \neq 0$ и $|\bar{b}| \neq 0$, то $\cos \varphi = 0 \implies \varphi = 90^\circ$ и $\bar{a} \perp \bar{b}$.

Заметим, что из формулы (8.1) следует, что: $\bar{a} \cdot \bar{b} > 0 \iff \widehat{(\bar{a}; \bar{b})}$ – острый, $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0 \iff \widehat{(\bar{a}; \bar{b})}$ – тупой.

5. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2. \quad (8.4)$$

Действительно: $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$. Из формулы (8.4) следует, что

$$\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|. \quad (8.5)$$

Это справедливо и для действительных чисел: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Пример 8.1. Найти $(\bar{a} - 2\bar{b})^2$, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $\widehat{(\bar{a}; \bar{b})} = 60^\circ$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright (\bar{a} - 2\bar{b})^2 &= \bar{a}^2 - 4\bar{a} \cdot \bar{b} + 4\bar{b}^2 = |\bar{a}|^2 - 4|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos 60^\circ + 4|\bar{b}|^2 = \\ &= 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 = 13. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ответ: $(\bar{a} - 2\bar{b})^2 = 13$.

Для получения выражения для скалярного произведения двух векторов через их координаты, заметим, что:

$$\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1, \quad \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0.$$

Рассмотрим два вектора

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \cdot (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = \\ &= a_x b_x \bar{i}^2 + a_x b_y \bar{i} \cdot \bar{j} + a_x b_z \bar{i} \cdot \bar{k} + \\ &+ a_y b_x \bar{j} \cdot \bar{i} + a_y b_y \bar{j}^2 + a_y b_z \bar{j} \cdot \bar{k} + \\ &+ a_z b_x \bar{k} \cdot \bar{i} + a_z b_y \bar{k} \cdot \bar{j} + a_z b_z \bar{k}^2 = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Окончательно имеем:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (8.6)$$

Пример 8.2. Установить – острый или тупой угол между векторами $\bar{a} = (1; 0; 2)$ и $\bar{b} = (-2; 1; 3)$.

► $\bar{a} \cdot \bar{b} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 4 > 0 \Rightarrow$ угол $\widehat{(\bar{a}; \bar{b})}$ острый. ◀

Учитывая формулу (8.6) и свойство 4 скалярного произведения, получаем, что для перпендикулярности двух векторов необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0. \quad (8.7)$$

Пример 8.3. При каком значении m вектор $\bar{a} = (1; -3; m)$ будет перпендикулярен вектору $\bar{b} = (2; 1; 4)$?

► $\bar{a} \perp \bar{b} \iff \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$. ◀

Ответ: $\bar{a} \perp \bar{b}$ при $m = \frac{1}{4}$.

Для получения выражения для косинуса угла между двумя ненулевыми векторами подставим выражения (8.6) и (7.11) в формулу (8.1). Получим:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (8.8)$$

Заметим, что знак $\cos \varphi$ зависит только от знака числителя дроби (8.8), т.е., как уже отмечалось, перпендикулярность векторов, острый или тупой угол между векторами – все это определяется знаком скалярного произведения.

Пример 8.4. Найти угол между векторами $\bar{a} = (1; 2; 3)$ и $\bar{b} = (-2; -1; -1)$.

► В соответствии с формулой (8.8):

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} = \\ &= -\frac{7}{2\sqrt{21}}. \end{aligned}$$

Принципиально задача решена, т.к. угол между векторами однозначно определяется значением $\cos \varphi (0 \leq \varphi \leq \pi)$. В данном случае угол тупой, т.к. $\cos \varphi < 0$.

При необходимости найти приближённое значение φ с помощью калькулятора, производим приближённые вычисления:

$$\cos \varphi = -\frac{7}{2\sqrt{21}} \approx -0,764 \Rightarrow \varphi \approx 2,44 \text{ радиан.} \blacktriangleleft$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = -\frac{7}{2\sqrt{21}}, \quad \varphi \approx 2,44 \text{ радиан.}$$

Пример 8.5. В параллелограмме $ABCD$ точка O – пересечение диагоналей $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$. (рис. 17) Выразите через эти векторы следующие: $\overline{CD}$, $\overline{CB}$, $\overline{CO}$, $\overline{BD}$.

► $\overline{CD} = -\vec{a}$, т.к. $|\overline{CD}| = |\overline{AB}| = |\vec{a}|$ и $\overline{CD} \uparrow \vec{a}$; $\overline{CB} = -\vec{b}$ аналогично; $\overline{CO} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}(-\overline{AC}) = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, т.к. $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, а точка O – середина диагоналей и $\overline{CA} = -\overline{AC}$; $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = -\vec{b} - \vec{a} = -(\vec{a} + \vec{b})$.

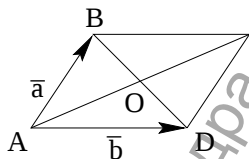


Рис. 17. Пример 8.5

Пример 8.6. В $\triangle ABC$ точка O – пересечение медиан, $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AC} = \vec{b}$ (рис. 18). Выразите через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующие векторы: $\overline{BC}$, $\overline{AN}$, $\overline{KO}$.

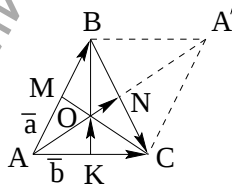


Рис. 18. Пример 8.6

$$\begin{aligned} \text{► } \overline{BC} &= \overline{BA} + \overline{AC} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}. \\ \overline{AN} &= \overline{AB} + \overline{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overline{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \\ &= \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}). \end{aligned}$$

Этот же результат можно получить построив $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABA'C$, в котором $\overline{AN} = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$.

Для нахождения $\overline{KO}$ напомним, что медианы в точке пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{KO} &= \frac{1}{3}|\overline{KB}|. \quad \overline{KO} = \frac{1}{3}\overline{KB} = \frac{1}{3}(\overline{KA} + \overline{AB}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overline{AC} + \bar{a}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\bar{b} + \bar{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}\right) = \frac{1}{3}\bar{a} - \frac{1}{6}\bar{b}. \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Самостоятельно найдите векторы $\overline{CN}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{OM}$.

$$\text{Ответ: } \overline{CN} = \frac{\bar{a} - \bar{b}}{2}, \quad \overline{BO} = \frac{\bar{b} - 2\bar{a}}{3}, \quad \overline{CO} = \frac{\bar{a} + 2\bar{b}}{3}, \quad \overline{OM} = \frac{\bar{a} - 2\bar{b}}{6}.$$

Пример 8.7. В правильном шестиугольнике точка O – пересечение диагоналей, $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AF} = \bar{b}$. (рис. 19) Самостоятельно выразите через эти векторы следующие: $\overline{DE}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CF}$. Учтите при этом, что все треугольники на рис. 19 – правильные.

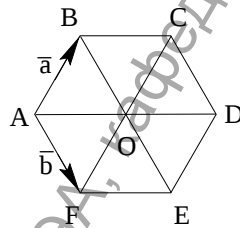


Рис. 19. Пример 8.7

$$\text{Ответ: } \overline{DE} = -\bar{a}, \quad \overline{OB} = -\bar{b}, \quad \overline{OC} = \bar{a}, \quad \overline{AD} = 2(\bar{a} + \bar{b}), \quad \overline{BC} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{CF} = -2\bar{a}.$$

Пример 8.8. В $\triangle ABC$ $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$, точки M и N делят сторону AB на три равные части. Найдите вектор $\overline{CM}$ (рис. 20).

$$\begin{aligned}\blacktriangleright \overline{AB} &= \bar{b} - \bar{a}, \quad \overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{3}(\bar{b} - \bar{a}), \quad \overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM} = \\ &= \bar{a} + \frac{1}{3}(\bar{b} - \bar{a}) = \frac{2\bar{a} + \bar{b}}{3}. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Пример 8.9. В $\triangle ABC$ AM – биссектриса (рис. 21), $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$. Найдите вектор $\overline{AM}$.

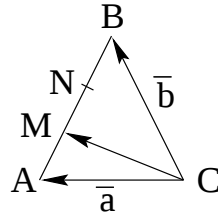


Рис. 20. Пример 8.8

► Вспомним, что биссектриса угла в треугольнике делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон:

$$\frac{|\overline{BM}|}{|\overline{MC}|} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AC}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|} \Rightarrow \frac{|\overline{BM}|}{|\overline{BC}|} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|},$$

так как $|\overline{BC}| = |\overline{BM}| + |\overline{MC}|$.

С учётом того, что $\overline{BC} = \vec{c} - \vec{b}$, получаем:

$$\overline{BM} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}(\vec{c} - \vec{b}) \Rightarrow,$$

$$\Rightarrow \overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = \vec{b} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{|\vec{b}| \cdot \vec{c} + |\vec{c}| \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}. \blacktriangleleft$$

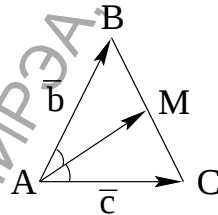


Рис. 21. Пример 8.9

Пример 8.10. Даны радиус-векторы вершин $\triangle ABC$: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Найти радиус-вектор $\vec{r}$ точки M – пересечения медиан (рис. 22, где точка O – начало координат).

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \overline{BC} &= \vec{r}_3 - \vec{r}_2, \overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \text{ как середина } BC, \overline{AB} = \\ &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AB} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{2} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \frac{1}{2}(\vec{r}_3 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_1), \overline{AM} = \end{aligned}$$

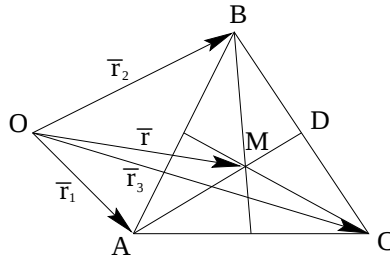


Рис. 22. Пример 8.10

$$\frac{2}{3}\overline{AD} = \frac{1}{3}(\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1) \Rightarrow \bar{r} = \overline{OM} = \bar{r}_1 + \overline{AM} = \bar{r}_1 + \frac{1}{3}(\bar{r}_3 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_1) = \frac{1}{3}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 + \bar{r}_3). \blacktriangleleft$$

Пример 8.11. Найдите длину и направляющие косинусы вектора $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 5\bar{k}$.

► В соответствии с формулами (7.11) и (7.16) получаем:

$$|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}; \quad \cos \beta = \frac{4\sqrt{2}}{10}; \quad \cos \gamma = \frac{5\sqrt{2}}{10}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.12. Докажите, что $ABCD$ – трапеция, если вершины имеют координаты: $A(3; 2; -2)$, $B(4; 4; 1)$, $C(-1; 2; 0)$, $D(-3; -2; -6)$.

► Сделайте эту задачу самостоятельно, проверив коллинеарность одной из пар векторов на противоположных сторонах. Используйте условие коллинеарности векторов (7.19). $\blacktriangleleft$

Пример 8.13. Найдите единичный вектор, противоположенный вектору $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$.

► $|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$. В соответствии с формулой (7.16) единичный вектор того же направления (сонаправленный) с вектором $\bar{a}$ имеет координаты:

$$\bar{e}_a = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{11}}\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}.$$

Искомый единичный вектор противоположенный вектору $\bar{a}$, равен $-\bar{e}_a$:

$$-\bar{e}_a = -\frac{1}{\sqrt{11}}\bar{i} - \frac{3}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.14. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

► По формуле (8.6) получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = -2.$$

Т.к. $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тупой. ◀

Пример 8.15. Найдите проекцию разности $\vec{a} - \vec{b}$ на ось l , если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, углы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с осью l равны $\pi/3$ и $\pi/4$ соответственно.

$$\text{Pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\pi/3) = 2 \cdot (1/2) = 1,$$

$$\text{Pr}_l \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \text{Pr}_l(\vec{a} - \vec{b}) = \text{Pr}_l \vec{a} - \text{Pr}_l \vec{b} = 1 - \sqrt{2}/2. \blacktriangleleft$$

Пример 8.16. При каком значении параметра m векторы $\vec{a}(2; 3; 5)$ и $\vec{b}(-2; 1; m)$ перпендикулярны?

► Условие перпендикулярности двух векторов даётся формулой (8.7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 5 \cdot m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{5}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.17. Найдите $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\blacktriangleright \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 4, \text{ поэтому:}$$

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 6\vec{b}^2 + 9\vec{a}\vec{b} - 4\vec{a}\vec{b} = 6 \cdot 1 - 6 \cdot 4 = -18. \blacktriangleleft$$

Пример 8.18. Найдите угол между векторами $\vec{a} = (-1; 0; 3)$ и $\vec{b} = (2; 1; 0)$.

► В соответствии с формулой (8.8):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 0 + 0}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{\sqrt{50}} = -\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{5} \right) = \pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{5} \quad (\text{угол тупой}). \blacktriangleleft$$

Пример 8.19. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $(2\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$.

► В соответствии с формулой (8.3) имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= (2\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 + 3\vec{a}\vec{b} = 2|\vec{a}|^2 - 2|\vec{b}|^2 + 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow, \\ &\Rightarrow 2 \cdot 4 - 2 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{5}{9} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{5}{9}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 8.20. Найдите проекцию $\text{Pr}_{2\bar{a}+\bar{b}}\bar{a}$, если $\bar{a} = (1; 2; 3)$, $\bar{b} = (-2; 1; 0)$.

► $2\bar{a} + \bar{b} = (2 \cdot 1 + 2)\bar{i} + (2 \cdot 2 + 1)\bar{j} + (2 \cdot 3 + 0)\bar{k} = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}$, $|2\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$. В соответствии с формулой (8.2), получаем:

$$\text{Pr}_{2\bar{a}+\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}(2\bar{a} + \bar{b})}{|2\bar{a} + \bar{b}|} = \frac{1 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3}{\sqrt{61}} = \frac{32}{\sqrt{61}}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.21. Найдите внутренний угол $A \triangle ABC$, если $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-1; 2; 1)$.

► Внутренний угол $A \triangle ABC$ равен углу между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем их координаты, вычитая из координат конца координаты начала вектора: $\overline{AB}(0; 1; 2)$, $\overline{AC}(-2; 1; 0)$.

$$\cos A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{0 + 1 + 0}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle A = \arccos \frac{1}{5}. \blacktriangleleft$$

Пример 8.22. Векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ образуют угол 45° , $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, найдите длину вектора $2\bar{p} - \bar{q}$.

► В соответствии с формулой (8.5):

$$\begin{aligned} |2\bar{p} - \bar{q}| &= \sqrt{(2\bar{p} - \bar{q})^2} = \sqrt{4|\bar{p}|^2 - 4|\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cos \widehat{\bar{p}\bar{q}} + |\bar{q}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 9} = \sqrt{25 - 12\sqrt{2}}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

8.2. Векторное произведение

Перейдем теперь к определению второго вида произведения векторов.

Введем вначале понятие правой и левой тройки векторов.

Определение 8.2. Векторы, параллельные одной плоскости, называются компланарными. В противном случае векторы называются некопланарными.

Замечание 8.2. Очевидно, что два вектора всегда компланарны.

Определение 8.3. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой, если при совмещении начал векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ для наблюдателя, находящегося на конце вектора $\vec{c}$, направление вектора $\vec{b}$ может быть получено из направления вектора $\vec{a}$ поворотом на кратчайший угол против часовой стрелки.

В противном случае (поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит по часовой стрелке) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую тройку.

Определение связано с правой рукой человека, откуда и берётся название.

Определение 8.4. Тройка некопланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, взятых в указанном порядке называется правой, если эти векторы, отложенные от одной точки, располагаются так, как расположены соответственно указательный, средний и большой пальцы правой руки.

Определение 8.5. Векторным произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

- 1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен обоим перемножаемым векторам: $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
- 2) модуль вектора $\vec{c}$ определяется формулой:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}); \quad (8.9)$$

- 3) векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то их векторное произведение по определению равно нулевому вектору.

Векторное произведение будем обозначать $\vec{a} \times \vec{b}$.

Замечание 8.3. Иногда векторное произведение обозначают с помощью квадратных скобок: $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Если на рис. 23 считать, что вектор $\vec{a}$ направлен направо, а вектор $\vec{b}$ – вверх в плоскости страницы, то вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен плоскости листа и направлен к читателю.

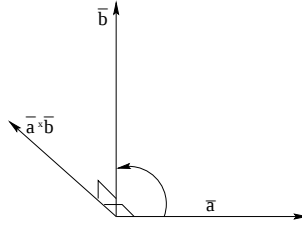


Рис. 23. Векторное произведение

8.3. Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность).

Действительно, из определения следует, что векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{b} \times \vec{a}$ имеют одинаковую длину: $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\widehat{\vec{b}; \vec{a}})$ и противоположные направления.

2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ (ассоциативность).

Докажем это свойство для $\lambda > 0$: вектор $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a} \times \vec{b}$. Вектор $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ при $\lambda > 0$ имеет то же направление. Длины этих векторов также совпадают: $|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$, $|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$.

Аналогично проводится доказательство для случая $\lambda < 0$.

3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (дистрибутивность).

Это свойство оставим без доказательства.

4. Условие коллинеарности векторов.

Для того чтобы два ненулевых вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулевому вектору:

$$\vec{a} \parallel \vec{b}, \quad |\vec{a}| \neq 0, \quad |\vec{b}| \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. \quad (8.10)$$

Действительно, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = \widehat{(\vec{a}; \vec{b})} = 0^\circ \implies \sin \varphi = 0$ и $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. Наоборот, если $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 0 \implies$

один из сомножителей равен нулю. Поскольку $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то $\sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 0$, и либо $\widehat{\vec{a}; \vec{b}} = 0$, либо $\widehat{\vec{a}; \vec{b}} = \pi$ и значит $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

5. Векторный квадрат равен нулевому вектору: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Это свойство является следствием свойства 4.

6. Геометрический смысл векторного произведения:

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах (рис. 24).

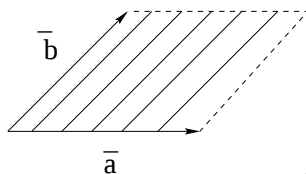


Рис. 24. Геометрический смысл векторного произведения

Действительно, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$, что совпадает с формулой площади параллелограмма, известной из курса средней школы.

Пример 8.23. Упростить выражение: $(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times \vec{j} - \vec{i} \times (\vec{j} - 2\vec{k})$.

Решение: Пользуясь свойствами векторного произведения, получим: $(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \times \vec{j} - \vec{i} \times (\vec{j} - 2\vec{k}) = 2\vec{i} \times \vec{j} + \vec{j} \times \vec{j} - \vec{k} \times \vec{j} - \vec{i} \times \vec{j} + 2\vec{i} \times \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j} + 2\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{k}$.

Для нахождения $\vec{i} \times \vec{j}$ заметим, что $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin 90^\circ = 1$, а направление совпадает с вектором $\vec{k}$ (рис. 25), т.е. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Аналогично убедитесь, что $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, поэтому окончательно: $\vec{i} \times \vec{j} + 2\vec{i} \times \vec{k} + \vec{j} \times \vec{k} = \vec{k} - 2\vec{j} + \vec{i} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Ответ: $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

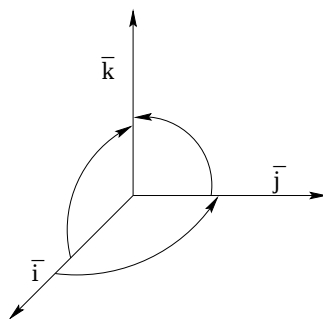


Рис. 25. Векторное произведение координатных ортов

Для получения выражения для векторного произведения двух векторов через их координаты найдем все парные векторные произведения единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ так, как это было сделано в предыдущем примере:

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.\end{aligned}$$

Аналогично тому, как это делалось при решении примера 8.23, найдем произведение:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}) \times (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \cdot \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \cdot \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \cdot \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_z \cdot \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \cdot \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \cdot \vec{k} \times \vec{j} = a_x b_y \cdot \vec{k} - a_x b_z \cdot \vec{j} - a_y b_x \cdot \vec{k} + \\ &+ a_y b_z \cdot \vec{i} + a_z b_x \cdot \vec{j} - a_z b_y \cdot \vec{i} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - \\ &- (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}.\end{aligned}$$

Разности, стоящие в скобках, равны определителям второго порядка:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \quad (8.11)$$

Полученное выражение есть разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (8.12)$$

Формулы для координат векторного произведения (8.11) удобнее запоминать в виде символического определителя (8.12), раскладывая его по первой строке.

Нужно отметить, что ранее определитель вводился как число, вычисляемое по некоторому правилу исходя из его элементов.

Здесь мы используем это правило для получения разложения (8.11) вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на составляющие. Таким образом, (8.12) не является определителем, но такая запись облегчает запоминание формулы (8.11).

Пример 8.24. Найти векторное произведение векторов $\bar{a} = (1; 2; 3)$ и $\bar{b} = (2; 0; -1)$.

Решение: $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \bar{k} = (-2 - 0)\bar{i} - (-1 - 6)\bar{j} + (0 - 4)\bar{k} = -2\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}.$

Ответ: $\bar{a} \times \bar{b} = -2\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}.$

8.4. Смешанное произведение

Определение 8.6. Смешанным произведением трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, т.е. скалярному произведению векторного произведения первых двух на третий вектор.

Замечание 8.4. Другие обозначения смешанного произведения имеют вид: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ или $(\bar{a} \ \bar{b} \ \bar{c})$.

Найдем выражение для смешанного произведения трёх векторов через их координаты, для чего запишем скалярное произведение вектора (8.11) на вектор $\bar{c} = c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k}$:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким образом, смешанное произведение равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты перемножаемых векторов.

Пользуясь свойствами определителя, докажем, что:

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Действительно, аналогично выводу предыдущей формулы, получаем:

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \cdot a_x - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \cdot a_y + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \cdot a_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Мы получили тот же определитель, что и в формуле для $((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})$. Таким образом доказано, что знаки скалярного и векторного произведения « $\cdot$ » и « $\times$ » в смешанном произведении можно переставлять. Поэтому смешанное произведение и принято обозначать $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$, как было указано выше:

$$(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (8.13)$$

Пример 8.25. Найти смешанное произведение $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})$, если $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; -1; 2)$.

Решение: Раскладывая определитель по последнему столбцу, получаем:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 3(2 - 1) + 2(1 + 4) = 13. \end{aligned}$$

Ответ: 13.

8.5. Свойства смешанного произведения

$$1. (\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = (\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}) = (\vec{b} \ \vec{c} \ \vec{a}) = -(\vec{b} \ \vec{a} \ \vec{c}) = -(\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{b}) = -(\vec{c} \ \vec{b} \ \vec{a}).$$

Доказательство этих соотношений проводится аналогично выводу формулы (8.12). Чтобы их запомнить, заметим, что при «циклической перестановке» векторов (вектор передвигается на следующее место, а последний – на первое) знак не меняется, а при перестановке двух соседних векторов знак меняется.

2. Геометрический смысл смешанного произведения.

Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах (рис. 26).

Для доказательства этого построим вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, длина которого в соответствии с геометрическим смыслом векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. площади основания параллелепипеда: $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$. Из определения смешанного произведения $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{d}$ и $\vec{c}$. На рис. 26 изображен случай $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Для этого случая получим, что высота параллелепипеда $h = |\vec{c}| \cos \varphi$.

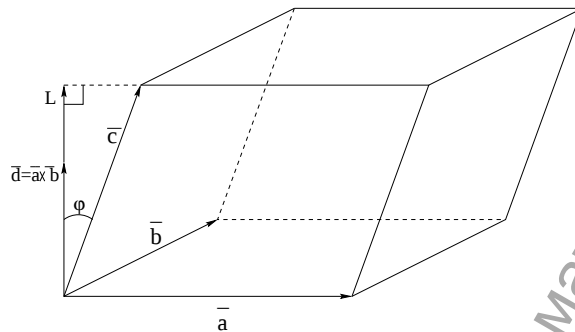


Рис. 26. Геометрический смысл смешанного произведения

Окончательно: $(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi = S \cdot h = V$ – объёму параллелепипеда, изображённого на рис. 26. В случае $\varphi > \frac{\pi}{2}$ получим $h = -|\vec{c}| \cdot \cos \varphi$ (т.к. $\cos \varphi < 0$) и $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = -V$. Окончательно получаем: $V = |(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c})|$.

Пример 8.26. Вычислить объём пирамиды с вершинами $A(2; -1; -1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 0; 3)$ и $D(6; 0; -1)$.

Решение: Рассмотрим векторы $\overrightarrow{DA} = (-4; -1; 0)$, $\overrightarrow{DB} = (-1; -1; 3)$, $\overrightarrow{DC} = (-3; 0; 4)$. Из школьного курса геометрии известно, что объём пирамиды, построенной на ребрах DA , DB , DC , в шесть раз меньше объёма параллелепипеда, построенного на этих ребрах:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{DA} \ \overrightarrow{DB} \ \overrightarrow{DC})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |-4 \cdot (-4) + 1(-4 + 9)| = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Ответ: $V_{\text{пир}} = 3,5$.

3. Условие компланарности векторов.

Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство.

Если три вектора компланарны, можно считать, что они лежат в одной плоскости и тогда, конечно, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен нулю, т.е. смешанное произведение равно нулю.

Если наоборот, смешанное произведение равно нулю, то объём параллелепипеда равен нулю и, значит, все векторы параллельны одной

плоскости (компланарны) или хотя бы один из них равен нулю, что тоже означает компланарность всех трёх векторов.

Другими словами, необходимым и достаточным условием компланарности трёх векторов является равенство нулю определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (8.14)$$

Пример 8.27. Установить, будут ли компланарны векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$, если даны координаты точек: $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

Решение:

Найдем координаты векторов, вычитая из координат конца координаты начала:

$$\overline{AB} = (-1; -1; 6), \quad \overline{BC} = (-1; 1; -4), \quad \overline{CD} = (3; -1; 2).$$

Вычислим значение определителя и проверим выполнение условия (8.14)

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-4) + 1(-2+12) + 6(1-3) = 2+10-12 = 0.$$

Ответ: векторы компланарны.

Пример 8.28. Найдите векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ для векторов $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Решение: В соответствии с формулой (8.12):

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(-9-1) - \vec{j}(6+1) + \vec{k}(2-3) = -10\vec{i} - 7\vec{j} - \vec{k}. \end{aligned}$$

Пример 8.29. Упростите выражение (вычислите):

$$\vec{j} \times \vec{i} + 3\vec{j} \times \vec{k} - 5\vec{k} \times \vec{i} + (3\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}).$$

Решение: На основании определения и свойств векторного произведения (п. п. 8.23, 8.29) получаем: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$,

поэтому искомое выражение равно:

$$\begin{aligned} -\bar{i} \times \bar{j} + 3\bar{j} \times \bar{k} + 5\bar{i} \times \bar{k} + 3\bar{i} \times \bar{i} - 18\bar{i} \times \bar{j} + 15\bar{i} \times \bar{k} + 5\bar{j} \times \bar{i} - 30\bar{j} \times \bar{j} + \\ + 25\bar{j} \times \bar{k} - \bar{k} \times \bar{i} + 6\bar{k} \cdot \bar{j} - 5\bar{k} \cdot \bar{k} = -\bar{k} + 3\bar{i} - 5\bar{j} + 3 \cdot \bar{0} - 18\bar{k} - 15\bar{j} - 5\bar{k} - \\ - 30 \cdot \bar{0} + 25\bar{i} - \bar{j} - 6\bar{i} - 5 \cdot \bar{0} = 22\bar{i} - 21\bar{j} - 24\bar{k}. \end{aligned}$$

Пример 8.30. Вычислите площадь треугольника $\triangle ABC$, если $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-1; 2; 1)$.

Решение: Площадь $\triangle ABC$ равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, которая в соответствии с п. 8.29 равна модулю векторного произведения этих векторов:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и их векторное произведение:

$$\overline{AB} = (1-1; 2-1; 3-1) = (0; 1; 2), \quad \overline{AC} = (-1-1; 2-1; 1-1) = (-2; 1; 0),$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -2\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}. \end{aligned}$$

Вычисляем модуль этого вектора по формуле (7.12):

$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Окончательно: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}.$$

Пример 8.31. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{p} - \bar{q}$ и $2\bar{p} + \bar{q}$, если $\bar{p}$ и $\bar{q}$ — единичные векторы, образующие угол 60° .

Решение: Найдем сначала векторное произведение:

$$\begin{aligned} (\bar{p} - \bar{q}) \times (2\bar{p} + \bar{q}) &= 2\bar{p} \times \bar{p} + \bar{p} \times \bar{q} - 2\bar{q} \times \bar{p} - \bar{q} \times \bar{q} = \\ &= 2 \cdot \bar{0} + \bar{p} \times \bar{q} + 2\bar{p} \times \bar{q} - \bar{0} = 3\bar{p} \times \bar{q}. \end{aligned}$$

Используя геометрический смысл и определение векторного произведения, получаем:

$$S = |3\bar{p} \times \bar{q}| = 3|\bar{p}| \cdot |\bar{q}| \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 8.32. Найдите высоту CD $\triangle ABC$ из примера 8.30.

Решение: Высоту $CD = h$ на сторону AB найдем используя формулу для площади треугольника: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}| \cdot h$, которую мы нашли через векторное произведение в примере 8.30: $S_{\triangle ABC} = \sqrt{6}$. Зная координаты вектора $\overline{AB} = (0; 1; 2)$, найденные ранее, определим длину основания треугольника:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

из уравнения $\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{5}h$ находим:

$$h = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{30}}{5}$$

Пример 8.33. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = (2; -1; 5)$ и $\bar{b} = (-2; 3; 0)$.

Решение: В качестве вектора, перпендикулярного как вектору $\bar{a}$, так и $\bar{b}$, выберем их векторное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -15\bar{i} - 10\bar{j} + 4\bar{k}. \end{aligned}$$

Теперь найдем вектор, сонаправленный этому и единичной длины:

$$\bar{e} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = \frac{-15\bar{i} - 10\bar{j} + 4\bar{k}}{\sqrt{15^2 + 10^2 + 4^2}} = -\frac{15}{\sqrt{341}}\bar{i} - \frac{10}{\sqrt{341}}\bar{j} + \frac{4}{\sqrt{341}}\bar{k}.$$

Заметим, что наряду с вектором $\bar{e}$, искомым вектором может быть также вектор $-\bar{e}$.

Пример 8.34. Найдите смешанное произведение векторов $\bar{a} = (1; -1; 2)$, $\bar{b} = (0; 1; 2)$, $\bar{c} = (2; 0; 1)$.

Решение: В соответствии с формулой (8.13) находим:

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 4 - 4 = -7.$$

Ответ: -7.

Пример 8.35. Найдите объём треугольной пирамиды с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.

Решение: Нетрудно показать, что объём треугольной пирамиды V_{nup} с вершиной в точке A в 6 раз меньше объёма параллелепипеда V_{nar} , построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. Действительно: $V_{nup} = \frac{1}{3}S_{nup}H$, $V_{nar} = S_{nar}H$, где S_{nup} , S_{nar} , H — соответственно площадь основания пирамиды, параллелепипеда и их общая высота. Если учесть, что $S_{nup} = \frac{1}{2}S_{nar}$ (площадь треугольника равна половине от площади параллелограмма), то получим: $V_{nup} = \frac{1}{6}V_{nar}$. Вычислим координаты перечисленных векторов: $\overline{AB} = (2; 1; 1)$, $\overline{AC} = (2; 3; 2)$, $\overline{AD} = (3; 3; 4)$. Найдем смешанное произведение:

$$(\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 7.$$

$$\text{Окончательно: } V_{nup} = \frac{1}{6}V_{nar} = \frac{1}{6}|\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}| = \frac{7}{6}.$$

Пример 8.36. Найдите высоту треугольной пирамиды из примера 8.35, опущенной из вершины A .

Решение: Так как высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, найдем H из формулы $V_{nar} = S_{nar}H$. Для нахождения S_{nar} площади основания параллелепипеда вычислим векторное произведение $\overline{BC} \times \overline{BD}$. Вычитая из координат конца координаты начала, получим $\overline{BC} = (0; 2; 1)$, $\overline{BD} = (1; 2; 3)$,

$$\overline{BC} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

$$S_{nap} = |\overline{BC} \times \overline{BD}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}. \text{ Из уравнения: } 7 = \sqrt{21}H \text{ получаем } H = \frac{7}{\sqrt{21}}.$$

Пример 8.37. Проверьте компланарность векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение: Найдем смешанное произведение

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = 8 - 15 + 7 = 0.$$

Ответ: Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Пример 8.38. Проверьте, лежат ли четыре точки $A(1; 1; 3)$, $B(-1; -1; -1)$, $C(2; 0; 3)$, $D(0; 1; 2)$ в одной плоскости?

Решение: Данные четыре точки будут лежать в одной плоскости, очевидно, тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ будут компланарны. Проверим это: $\overline{AB} = (-2; -2; -4)$, $\overline{AC} = (1; -1; 0)$, $\overline{AD} = (-1; 0; -1)$.

$$(\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = -2 + 2 \cdot (-1) + 4 = 0.$$

Так как смешанное произведение равно нулю, векторы компланарны и точки лежат в одной плоскости.

Пример 8.39. Даны три вектора $\vec{a} = 5\vec{i} - 6\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 7\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

- 1) Проверить на коллинеарность и ортогональность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 2) Проверить компланарны ли вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Решение:

1) Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ или $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Это означает, что координаты коллинеарных векторов пропорциональны:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Проверяем это условие:

$$\frac{5}{4} \neq \frac{-6}{8}.$$

Следовательно вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **не коллинеарны**.

Проверим ортогональность этих векторов. Условие ортогональности векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.

Для заданных векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = 5 \cdot 4 + (-6) \cdot 8 + (-4) \cdot (-7) = 0$.

Следовательно вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ **ортогональны**.

2) Для проверки компланарности векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, найдем смешанное произведение

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -4 \\ 4 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 19 - 4 \cdot 64 = -199.$$

Следовательно вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ **некомпланарны**.

Пример 8.40. Доказать, что векторы $\bar{a} = (5, 7, -2)$, $\bar{b} = (-3, 1, 3)$ и $\bar{c} = (1, -4, 6)$ образуют базис в V_3 . Найти координаты вектора $\bar{d} = (14, 9, -1)$ в этом базисе.

Решение:

Вектора образуют базис, если они независимы. Три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют базис в V_3 , если они некомпланарны. Три вектора некомпланарны, если их смешанное произведение не равно нулю.

Если заданы координаты векторов, то смешанное произведение находится по формуле:

$$(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Найдём смешанное произведение для заданных векторов:

$$(\bar{a} \bar{b} \bar{c}) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 18 - 7 \cdot (-21) - 2 \cdot 11 = 90 + 147 - 22 = 215.$$

Вектора некомпланарны, следовательно они **образуют базис** в V_3 .

Найдём разложение вектора $\bar{d}$ в базисе векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

$$\bar{d} = x_1 \bar{a} + x_2 \bar{b} + x_3 \bar{c}.$$

Подставляя координаты заданных векторов, получаем систему трёх линейных алгебраических уравнений:

$$x_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем её в стандартном виде:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 14, \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ -2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$$

Решаем её методом обратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -4 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Определитель данной матрицы мы уже вычислили $|A| = 215$. Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 18, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 21, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -34, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 32, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 27,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 23, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 26.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{215} \begin{pmatrix} 18 & 21 & 11 \\ -34 & 32 & 27 \\ 23 & -9 & 26 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что условие (3.1) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ выполняется.

$$X = A^{-1} \cdot d = \frac{1}{215} \begin{pmatrix} 18 & 21 & 11 \\ -34 & 32 & 27 \\ 23 & -9 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, разложение вектора $\bar{d}$ в новом базисе имеет вид:
 $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}.$

Проверим полученное решение. Перейдём к старому базису:
 $2 \cdot (5; 7; -2) - (-3; 1; 3) + (1; -4; 6) = (10 + 3 + 1; 14 - 1 - 4; -4 - 3 + 6) =$
 $= (14; 9; -1).$

Получили заданный вектор $\vec{d}$.

Ответ: $\vec{d} = (2; -1; 1).$

Пример 8.41. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

$A(-3, 2, 1)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(1, -2, 1)$ и $D(3, 1, 2)$.

Найти: 1) Внутренний угол A треугольника ABC ;

2) Площадь треугольника ABC ;

3) объём пирамиды $ABCD$;

4) длину высоты, опущенной из вершины D пирамиды $ABCD$.

Решение:

Найдём координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-2 - (-3); 1 - 2; 0 - 1) = (1; -1; -1);$$

$$\overline{AC} = (1 - (-3); -2 - 2; 1 - 1) = (4; -4; 0);$$

$$\overline{AD} = (3 - (-3); 1 - 2; 2 - 1) = (6; -1; 1).$$

1) Для вычисления угла между векторами используем формулу:

$$\cos(\angle A) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 = 8.$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}.$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}.$$

$$\cos A = \frac{8}{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\angle A = \arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3})$.

2) Для вычисления площади треугольника ABC используем формулу:

$$S_{\triangle ABC} = 0,5 |\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

$$\begin{aligned} \vec{d} = \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= -4\vec{i} + 4\vec{j}. \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = 0,5 \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 2\sqrt{2}$.

3) Найдём смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$.

$$(\overline{ABACAD}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 20.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{ABACAD})| = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Ответ: } V_{ABCD} = \frac{10}{3}.$$

4) Так как высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, найдем H из формулы

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} H.$$

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3 \cdot 10}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ответ: } H = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Пример 8.42. Пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений, вычислить угол φ между векторами $\vec{a} = -2\vec{p} + \vec{q}$ и $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$ и площадь параллелограмма S , построенного на этих векторах. Если известно, что угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен $\pi/3$, $|\vec{p}| = 1$ и $|\vec{q}| = 2$.

Решение: Найдём скалярное произведение векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$.
 $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \widehat{pq} = 1 \cdot 2 \cdot \cos(\pi/3) = 1.$

Используя свойство скалярного произведения, найдём длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2\vec{p} + \vec{q}) \cdot (3\vec{p} + \vec{q}) = -6\vec{p}^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 3\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 = -6 - 2 + 3 + 4 = -1.$$

$$\vec{a}^2 = (-2\vec{p} + \vec{q}) \cdot (-2\vec{p} + \vec{q}) = (-2\vec{p} + \vec{q})^2 = 4\vec{p}^2 - 4\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 = 4 - 4 + 4 = 4.$$

$$\vec{b}^2 = (3\vec{p} + \vec{q}) \cdot (3\vec{p} + \vec{q}) = (3\vec{p} + \vec{q})^2 = 9\vec{p}^2 + 6\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^2 = 9 + 6 + 4 = 19.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = 2, \quad |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{19}.$$

И наконец, находим косинус искомого угла

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{1}{2\sqrt{19}}, \quad \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{19}}\right).$$

Для вычисления площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используем формулу $S = ab \sin \varphi$.

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - \frac{1}{76}} = \sqrt{\frac{75}{76}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}.$$

$$S = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\varphi) = 2\sqrt{19} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = 5\sqrt{3}.$$

Площадь параллелограмма S , построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, можно найти используя определение векторного произведения.

$$\begin{aligned} \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= (-2\bar{p} + \bar{q}) \times (3\bar{p} + \bar{q}) = -6\bar{p} \times \bar{p} - 2\bar{p} \times \bar{q} + 3\bar{q} \times \bar{p} + \bar{q} \times \bar{q} = \\ &= \bar{0} + \bar{q} \times \bar{p} + \bar{0} = \bar{q} \times \bar{p}. \end{aligned}$$

Тогда

$$S = |\bar{c}| = |\bar{q}||\bar{p}| \sin \pi/3 = 2 \cdot \sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{19}}\right); \quad S = 5\sqrt{3}.$$