

Лекция 5. Подготовка к контрольной работе по матрицам.

1. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

◀Применяем свойство определителей: если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины.

Прибавим к первой строке четвертую умноженную на 2. Затем к четвертой строке добавим третью умноженную на 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Раскладываем определитель по третьему столбцу, и в полученном определителе третьего порядка, к третьей строке добавим вторую.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = 0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix} - 0 = \\ &= \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \\ 9 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} - 0 = 3 \cdot (65 + 9) = 222. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

◀Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем матричное уравнения в виде $XA = B$. Здесь X — искомая матрица размерностью $[3 \times 2]$.

Умножаем обе части матричного уравнения справа на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot E = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}.$$

Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

$$|A| = 5 \cdot (-2) - (-4) \cdot 3 = 2;$$

$$A_{11} = M_{11} = -2;$$

$$A_{21} = -M_{21} = 4; \quad A_{12} = -M_{12} = -3; \quad A_{22} = M_{22} = 5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X &= BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) & -2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \\ 7 \cdot (-2) + 6 \cdot (-3) & 7 \cdot 4 + 6 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -18 & 32 \\ -32 & 58 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} X \cdot A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 3 & 4 - 2 \\ -45 + 48 & 36 - 32 \\ -80 + 87 & 64 - 58 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = B. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 16 \\ -16 & 29 \end{pmatrix}.$

3. Решить систему уравнений тремя методами: 1) методом Крамера, 2) методом обратной матрицы (проверить выполнимость равенства $A \cdot A^{-1} = E$) и 3) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 &= -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 16. \end{cases}$$

1) Метод Крамера.

◀Найдём определитель основной матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 2) - (1 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 3) = \\ = 12 - 2 + 10 - 1 + 20 - 12 = 27.$$

При вычислении $|A|$ использовано правило треугольника. Так как $|A| \neq 0$, получаем, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли система совместна и определённа, т.е. имеет единственное решение.

Вычислим определители неизвестных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \\ 16 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

К первой строке определителя добавили вторую и из третьей строки вычли вторую, умноженную на 2.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 8 & 2 \\ 1 & 16 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} + 11 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 16 \end{vmatrix} = \\ = 0 + 198 + 72 = 270.$$

Разложили определитель по первой строке.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -11 \\ 5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -11 \\ 8 & 0 & -3 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -48 + 21 = -27.$$

Ко второй строке определителя добавили первую и к третьей строке добавили первую, умноженную на 2.

Получили:

$$|A| = 27; \quad \Delta_1 = 0; \quad \Delta_2 = 270; \quad \Delta_3 = -27.$$

Используя формулы Крамера (3.16), найдём решение заданной системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{0}{27} = 0; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{270}{27} = 10; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{-27}{27} = -1.$$

Проверка. Подставим полученное решение в заданную систему.

$$\begin{cases} 3 \cdot 0 - 10 - 1 & = -11, \\ 5 \cdot 0 + 10 + 2 \cdot (-1) & = 8, \\ 0 + 2 \cdot 10 - 4 & = 16. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 & = -11, \\ 8 & = 8, \\ 16 & = 16. \end{cases}$$

Получили тождество. ►

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 10$; $x_3 = -1$.

2) Метод обратной матрицы.

◀ В матричной форме эта система запишется в виде $AX = B$. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Решение ищем в виде (3.10)

$$X = A^{-1}B.$$

Обратная матрица A^{-1} , вычисляется по формуле (3.2)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы найден при решении данной системы методом Крамера $|A| = 27$.

Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -18, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ выполняется.

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим решение системы

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -18 & 11 & -1 \\ 9 & -7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 1$.

3) Метод Гаусса.

◀ Составим расширенную матрицу и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

(1). К 3-ей строке прибавим 1-ую, умноженную на 2, а затем ко 2-ой строке прибавим первую.

(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 8 & 0 & 3 & -3 \\ 7 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 7 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right).$$

(3). Из 3-ей строки вычтем 2-ую, умноженную на 7.

(4). Из 1-ой вычтем 2-ую умноженную на 3 и 3-ью строку разделим на 27.

(5). К 1-ой строке добавим 2-ую, умноженную на -10 и ко второй строке прибавим третью, умноженную на 3.

(6). Первую строку умножим на -1 и поменяем её со второй.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 27 & -27 \end{array} \right) \xrightarrow{(4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 10 & -20 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \xrightarrow{(5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(6)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Мы выполнили прямой и обратный ход метода Гаусса. Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 10, \\ x_3 = -1. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = -1$.

4. Найти общее решение линейной однородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Найти фундаментальную систему решений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 + 9x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

◀ Выпишем матрицу системы и при помощи элементарных преобразований приведём её к равносильной. Все элементарные преобразования правую

часть не изменяют.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Из 3-ей строки вычтем 1-ую, а затем из 1-ой вычтем 2-ую.
- (2) Вычтем первую строку из 2-ой, 3-ей и 4-ой.
- (3) 2-ую строку прибавим к 3-ей и 4-ой.
- (4) Убираем нулевую строку и к 2-ей строке прибавляем 3-ью.
- (5) Из 1-ой строки вычтем 2-ую и к 3-ей прибавим вторую, умноженную на 2.
- (6) К 1-ой строке прибавим 3-ью и 3-ью умножим на -1 .

$$\begin{aligned} A &\stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\stackrel{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 3$, количество неизвестных равно 5. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли система совместна, но неопределённая, т.е. имеет бесконечное число решений. Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_1 , x_3 и x_5 , тогда свободными неизвестными будут x_2 и x_4 . Выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -1,5x_2 - 0,5x_4, \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Свободные неизвестные x_2 и x_4 могут принимать произвольные значения, обозначим их c_1 и c_2 , соответственно.

$$\begin{cases} x_1 = -1,5c_1 - 0,5c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = 0, \end{cases} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Общее решение исследуемой системы уравнений можно представить в виде линейной комбинации двух матриц-столбцов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы (5.1) являются линейно независимые матрицы-столбцы $\{X_1^0, X_2^0\}$:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^0 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0 и X_2^0 образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих матриц-столбцов $c_1X_1^0 + c_2X_2^0$ равна нулевой матрице только при $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1X_1^0 + c_2X_2^0 = \begin{pmatrix} -1,5c_1 - 0,5c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляем эти матрицы-столбцы в ОСЛАУ $AX = 0$.

$$A \cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 6 \\ -3 + 3 \\ -9 + 9 \\ -3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2 \\ -1+1 \\ -3+3 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решения системы (5.1) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0,$$

где c_1 , и c_2 — произвольные действительные числа. ►

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1,5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Найти общее решение линейной неоднородной системы методом Гаусса (указать ранг матрицы системы). Выделить общее решение соответствующей однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -2. \end{cases} \quad (5.2)$$

◄Выпишем расширенную матрицу $A|B$ и выполним над ней элементарные преобразования приводящие систему к равносильной.

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & -2 & 11 \\ 2 & -1 & -6 & 9 & -2 \end{array} \right).$$

(1). Из 2-ей строки вычтем 1-ую, а затем к 3-ей строке прибавим 2-ую, умноженную на 2.

(2) Из 2-ой строки вычтем 3-ью, умноженную на 2 и ещё первую строку умножим на -1 .

(3) К первой строке прибавляем 3-ю строку и убираем нулевую строку.

$$\begin{aligned} (A|B) &= \stackrel{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right) \stackrel{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\stackrel{(3)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2$, количество неизвестных равно 4. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система совместна, но неопределённая.

Запишем полученную систему, которая равносильна исходной, в стандартном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_1 и x_2 , тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4 . Выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - 5x_4 + 1, \\ x_2 = 2x_3 - x_4 + 4. \end{cases}$$

Свободные неизвестные x_3 и x_4 могут принимать произвольные значения, обозначим их c_1 и c_2 , соответственно.

$$\begin{cases} x_1 = 4c_1 - 5c_2 + 1, \\ x_2 = 2c_1 - c_2 + 4, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2, \end{cases}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Общее решение исследуемой системы уравнений можно представить в виде линейной комбинации трёх матриц-столбцов

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом сумма первых двух матриц-столбцов является общим решением однородной системы с основной матрицей $A = X_{OO}$, а последнее слагаемое является частным решением заданной неоднородной системы (5.2) — X_q .

$$X_{OO} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, X_q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы являются линейно независимые матрицы-столбцы $\{X_1^0, X_2^0\}$:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2^0 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0 и X_2^0 образуют фундаментальную систему решений. Эти матрицы-столбцы являются линейно независимые так как их линейная комбинация равна нулевой матрице, тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = 0$.

$$c_1 X_1^0 + c_2 X_2^0 = \begin{pmatrix} 4c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 - c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Подставляем эти матрицы-столбцы в ОСЛАУ $AX = 0$.

$$A \cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 2 + 2 \\ -4 + 6 - 2 \\ 8 - 2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 - 4 \\ 5 - 3 - 2 \\ -10 + 1 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем частное решение НСЛАУ (5.2).

$$AX_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4 \\ -1 + 12 \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Получили правую часть системы.

Общее решения системы (5.2) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ и произвольное частное решение НСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0 + X_{\text{ч}},$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные числа. ►

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$