РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 3

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 2
Определители (Детерминанты)

Вычисление определителей 1-го, 2-го и 3-го порядков (правила Саррюса). Миноры и алгебраические дополнения. Определитель n-го порядка. Разложение определителя по строке и столбцу. Основные свойства определителей. Вычисление определителей с помощью их свойств. Определитель произведения квадратных матриц и транспонированной матрицы.

Берков Николай Андреевич

8 сентября 2023г

1.3. Определители второго порядка и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1. ***Определителем*** *(или* ***детерминантом****) квадратной матрицы второго порядка, соответствующим данной матрице A, называется число* $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Определитель обозначают через $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, *или* $|A|$, *или* $\det A$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.1)$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются **элементами определителя.**

Пример 1.6. *Вычислить определитель матрицы* $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -23.$

Пример 1.7. *Вычислить определители матриц*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 1 = -8 - 3 = -11,$$

$$|B| = \begin{vmatrix} b & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2b - a.$$

Свойства определителя второго порядка

1. Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами, т. е. $|A| = |A^T|$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину, т. е.: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (или столбцами) равен нулю: $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0.$

4. Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0.$

6. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & a \\ kb & b \end{vmatrix} = 0.$

7. Если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Все вышеприведённые свойства доказываются непосредственно раскрытием определителя.

8. Если элементы какой-нибудь строки (столбца) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух соответствующих определителей.

► Докажем это.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+b_{11})a_{22} - a_{12}(a_{21}+b_{21}) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (b_{11}a_{22} - a_{12}b_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

9. Определитель произведения дух матриц равен произведению определителей этих матриц.

$$|AB| = |A||B|. \tag{1.8}$$

► Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |AB| &= \underline{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} + \underline{\underline{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}} - \\ &-(\underline{a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}} + a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + \underline{\underline{a_{12}a_{22}b_{21}b_{22}}}). \end{aligned}$$

Подчёркнутые слагаемые сокращаются.

$|AB| = (a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}) - (a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22})$.

Для правой части

$$|A||B| = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= (a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}) - (a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} + a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}) =$$
$$= |AB|. \quad ◄$$

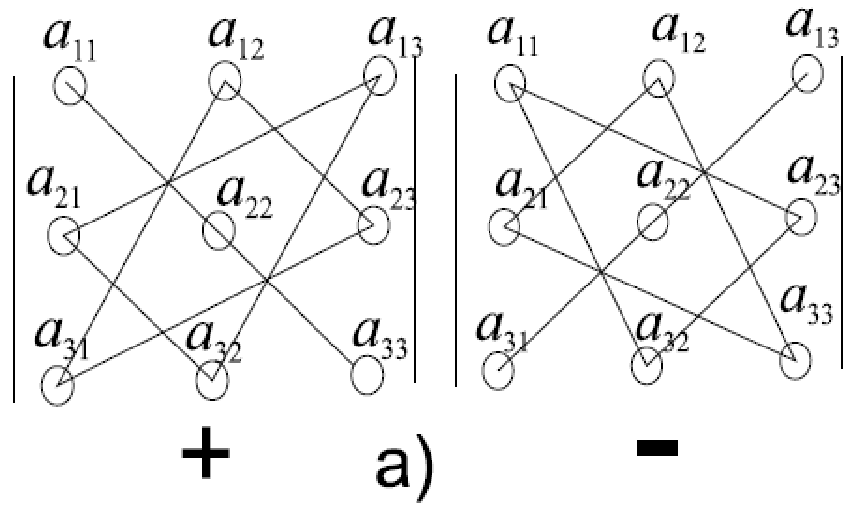
10. Определитель диагональной, верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}.$$

Определитель третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

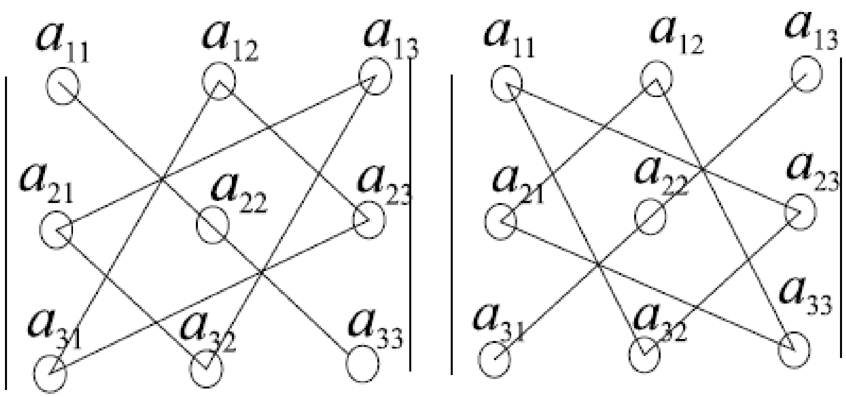
Часто для вычисления определителя третьего порядка используется *правило треугольника.*



Построим треугольники вершинами которых являются узлы находящиеся в разных строчках и столбцах матрицы A. Таких треугольников шесть, три треугольника содержат стороны параллельные главной диагонали и три – параллельные побочной диагонали, рис.1а). Правая части формулы 2.10 состоит из суммы трёх слагаемых, содержащих произведения элементов стоящих в вершинах этих треугольников, причём знак плюс выбирается для треугольников первой группы и знак минус для треугольников из второй группы.

$$\begin{aligned} \det A = \; & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

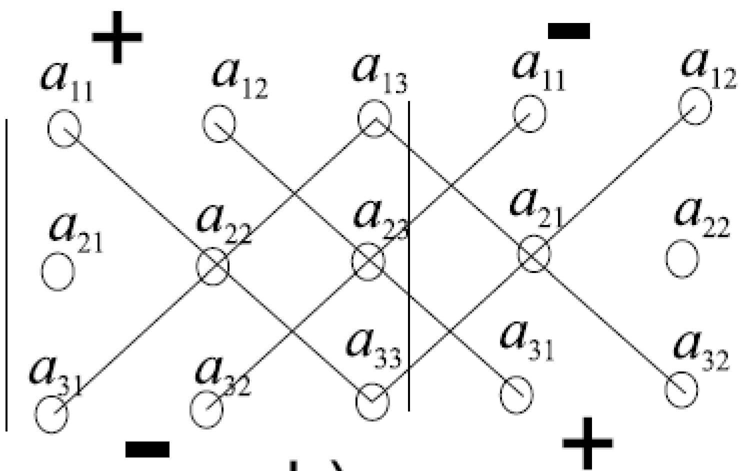
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$



\+ a) −

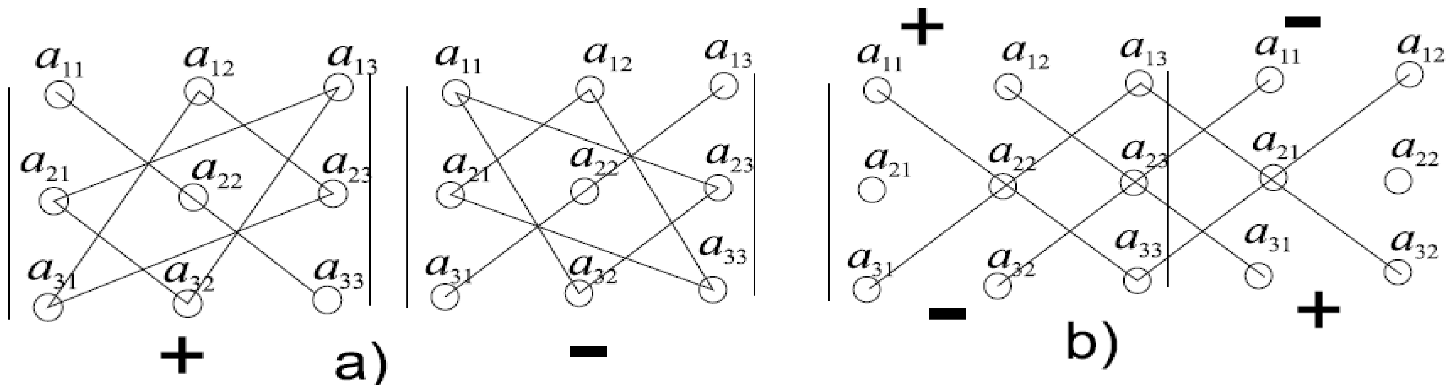
$$\det A = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array} \qquad (2.10)$$

Наряду с правилом треугольника применяется **правило Саррюса**, которое призвано внести в процесс вычисления определителя большую наглядность, уменьшив тем самым вероятность возникновения ошибки. Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком «плюс»; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус», рис.1b).



b)

$$\det A = \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \qquad (2.10)$$



Пример 2.2. *Вычислить определитель третьего порядка* $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

1) Применяем формулу (2.10), реализующую *метод треугольников* или правило *Саррюса*. Для наглядности применения последней формулы, приписываем справа к определителю $|A|$ два первых столбца.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & -10 & -1 & -2 \\ 1 & 9 & 10 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right. .$$

$$|A| = +((-1)\cdot 9\cdot 0 + (-2)\cdot 10\cdot 1 + (-10)\cdot 1\cdot 2) - ((-10)\cdot 9\cdot 1 + $$
$$+(-1)\cdot 10\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot 0) = -20 - 20 + 20 + 90 = 70.$$

2.2. Определители высших порядков

Существует два способа определения детерминантов высших порядков.

1. Определитель равен сумме $n!$ различных слагаемых содержащих по одному элементу в каждой строке и каждом столбце, причём каждое слагаемое берется со знаком плюс или минус, в зависимости от четности или нечётности перестановки выбранных элементов.

2. Определитель вычисляется по рекурсивной формуле понижающей на каждой рекурсии порядок определителя на 1. Выход из рекурсии происходит когда порядок определителя станет равным 2 или 1.

Для вычисления определителей высоких порядков первый способ очень трудоёмок, т.к. содержит $n!$ слагаемых каждое из которых состоит из n множителей. На практике такие определители вычисляют либо рекурсивным способом, либо при помощи преобразований строк и столбцов сводящим определитель к треугольному виду. Мы будем применять рекурсивное определение определителя.

2.2. Определители высших порядков

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2.3)$$

Определение* 2.2. *Определителем* (*или* *детерминантом*) *n-го порядка, соответствующим данной квадратной матрице, называют число, получаемое из элементов матрицы A по определённому* **рекурсивному** *закону – закону раскрытия определителя.

Это число обозначается $|A|$ или det A

$$det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2.4)$$

Определение* 2.3. *Минором, соответствующим данному элементу определителя n-го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Миноры будем обозначать заглавными буквами M_{ij} с двумя индексами. Так, например, минор M_{21}, соответствующий элементу a_{21} определителя (2.4), есть определитель $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.
Он получается, если вычеркнуть в определителе n-го порядка вторую строку и первый столбец.

Определение 2.4. *Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, в которых стоит элемент, чётна, и со знаком минус, если эта сумма нечётна.*

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается через A_{ij}. Здесь i означает номер строки, а j-номер столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Связь между алгебраическим дополнением элемента и его минором выражается следующим равенством:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (2.5)$$

Например: $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$; $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

Замечание 2.1. *Полезно представлять знаки в формуле (2.5) следующей матрицей «знаков» Z:*

$$Z = \begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \dots \\ - & + & - & + & - & + \dots \\ + & - & + & - & + & - \dots \\ - & + & - & + & - & + \dots \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Если на месте элемента a_{ij} в матрице Z стоит «$+$», то соответствующее алгебраическое дополнение не отличается от минора, а наличие знака «$-$» означает, что алгебраическое дополнение и минор имеют противоположные знаки. В матрице Z нечётные строки начинаются со знака «$+$», а чётные – со знака «$-$», а далее знаки чередуются и по горизонтали и по вертикали.

Закон раскрытия определителей n -го порядка можно записать следующим образом:

$$\det A = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых} \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

или

$$\det A = a_{j}A_{1j}+a_{2j}A_{j2}+\ldots+a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Определитель n-го порядка равен сумме попарных произведений элементов какой-либо его строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

Так как согласно определениям 2.3 и 2.4, алгебраическое дополнение любого элемента определителя n - го порядка является определителем $n-1$ -го порядка, из формул (2.7) и (2.8) следует, что любой *определитель n -го порядка сводится к сумме n определителей $n-1$ -го порядка.*

В качестве примера использования формул (2.7) и (2.8) приведем формулы разложения определителя третьего порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

по элементам первой строки $|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$, и элементам второго столбца $|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$.

Замечание 2.2. *Для определителя 2-го порядка* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, *алгебраическим дополнением, согласно (2.5),* $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$. *Раскрывая* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ *по рекурсивной формуле (2.7) или (2.8) получим формулу (2.1).*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.1)$$

Пример 2.2. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

►Решим данную задачу тремя способами.

1) Применяем формулу (2.10), реализующую *метод треугольников* или правило *Саррюса*. Для наглядности применения последней формулы, приписываем справа к определителю $|A|$ два первых столбца.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & -2 & -10 & -1 & -2 \\ 1 & 9 & 10 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right. .$$

$$|A| = +((-1)\cdot 9\cdot 0 + (-2)\cdot 10\cdot 1 + (-10)\cdot 1\cdot 2) - ((-10)\cdot 9\cdot 1 + \\ +(-1)\cdot 10\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot 0) = -20 - 20 + 20 + 90 = 70.$$

Пример 2.2. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.11)$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad \text{для любых} \quad i=1,\ldots,n \qquad (2.7)$$

2) Воспользуемся формулой (2.7) и раскроем определитель (2.11), например, по элементам третьей строки ($i = 3$) :

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \qquad (2.12)$$

Предварительно вычислим алгебраические дополнения,

$$A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = 1\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = (-2)10-9(-10) = -20+90 = 70;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -1\begin{vmatrix} -1 & -10 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = -[(-1)10-1(-10)] = 0;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 1\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = (-1)9-1(-2) = -9+2 = -7.$$

Подставим полученные числовые значения алгебраических дополнений в формулу (2.12) и вычислим определитель

$$|A| = 1\cdot 70 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-7) = 70.$$

Пример 2.2. *Вычислить определитель третьего порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

3) Прибавим к элементам первой строки элементы третьей строки и вычтем из элементов второй строки элементы третьей строки

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Теперь раскроем полученный определитель по элементам первого столбца и получим результат, известный из решения примера 24.6.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 70.$$

Все свойства определителя 2-го порядка, приведенные в п. 1.4, без всяких изменений переносятся и на определители n-го порядка.

Кроме них и правила раскрытия определителя укажем ещё одно важное свойство определителя.

11. Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

Так, для определителя третьего порядка можно записать

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0;$$
$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = 0.$$

Докажем, например, первое равенство

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}(-M_{21}) + a_{12}M_{22} + a_{13}(-M_{23}) =$$

$$= -a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) =$$

$$= -a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{11}a_{33} -$$

$$-a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{11}a_{32} + a_{13}a_{12}a_{31} = \underline{0.}$$

Пример 1.8. *Вычислить определитель четвёртого порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение: Применяем свойство определителей: если к элементам какой-либо строки (или столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины. Вычтем из первого столбца второй и из четвёртого третий:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь к первой строке добавим вторую умноженную на два

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 & -3 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 6 & 1 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

После таких тождественных преобразования мы получили определитель в первом столбце которого содержится только один ненулевой элемент. Раскладываем теперь это определитель по первому столбцу. В данном разложении будет только одно ненулевое слагаемое.

$$|A| = (-3)\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.8. *Вычислить определитель четвёртого порядка*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$|A| = (-3)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления полученного определителя третьего порядка применим то же свойство. К первой и третьей строкам прибавим вторую, а затем раскладываем по третьему столбцу

$$|A| = 3\cdot\begin{vmatrix} 12 & 14 & 0 \\ 5 & 8 & -1 \\ 9 & 13 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{2+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 12 & 14 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} = 3(12\cdot13-14\cdot9) = 90.$$

Отметим, что все свойства определителей второго порядка, приведённые в начале раздела, справедливы и для определителей высших порядков. Докажем 10 свойство для определителя n-го порядка.

Определитель диагональной, верхнетреугольной и нижнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Для верхнетреугольной матрицы последовательно раскладываем определитель по первому столбцу.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{13} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}\dots a_{nn}.$$

Обратная матрица

Рассмотрим так называемую обратную матрицу, понятие которой вводится только для квадратной матрицы.

Определение 25.1. *Если A – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию*

$$AA^{-1} = E. \tag{25.1}$$

Можно доказать, что матрицы A и A^{-1} являются коммутативными:

$$A^{-1}A = E.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 25.1. **(об обратной матрице)**: *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.*

Обратная матрица

Теорема 25.1. (об обратной матрице): *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.*

► **Необходимость.** ►Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}.

Покажем, что в этом случае матрица A должна быть невырожденной, т.е. её определитель $|A| \neq 0$.

Действительно, если бы $|A| = 0$, то определитель произведения

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}| = 0.$$

Но это невозможно в силу того, что $|AA^{-1}| = |E| = 1.$◄

Обратная матрица

Достаточность. ▶Для простоты проведем доказательство для случая матрицы третьего порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ — невырожденная матрица, т.е. её определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Образуем матрицу B^T, транспонированную по отношению к матрице B. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}$$

Составим матрицу B, заменяя в матрице A каждый её элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij}, делённым на определитель $|A|$ матрицы A:

$$B^T = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Покажем, что матрица B^T, является обратной матрице A. Для этого составим произведение

$$AB^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \frac{a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}}{|A|} & \frac{a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

Вычисляется обратная матрица по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Определение 3.3. *Квадратная матрица*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

называется ***присоединённой*** *или* ***союзной*** *по отношению к матрице* A.

С учётом данных определений, обратную матрицу можно записать в виде произведения союзной матрицы $\widetilde{A}$ на число $\dfrac{1}{\det A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}. \tag{3.4}$$

Свойства обратной матрицы

Приведём без доказательства свойства обратной матрицы.

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$

2. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}.$

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$

4. $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}.$

5. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}.$

Рассмотрим наиболее простой пример для вычисления обратной матрицы второго порядка.

Пример *Дана матрица* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Найти обратную матрицу.*

Р е ш е н и е: Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$$

Находим все четыре алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условия (3.1) $AA^{-1} = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 + 2/5 & -2/5 + 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 2/5 + 3/5 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Пример 25.1. *Дана матрица* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Найти обратную матрицу.*

Р е ш е н и е: Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Следовательно, $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 2

Берков Николай Андреевич

8 сентября 2023г

Спасибо за внимание