

РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 2



Лекция 3

Формулы Крамера. Обратная матрица.

Обратная матрица: определение; алгоритм вычисления. Критерий обратимости матрицы. Решение матричных уравнений и систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Берков Н.А

14 сентябрь 2023г

Обратная матрица

Определение 3.1. Квадратная матрица называется невырожденной, если её определитель отличен от нуля, и вырожденной в противном случае.

Определение 3.2. Квадратная матрица A^{-1} называется матрица обратной для квадратной матрицы A , если выполняется равенства:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad (3.1)$$

Теорема 3.1. (об обратной матрице): Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы её определитель был отличен от нуля.



Определение 3.3. Квадратная матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{22} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

называется присоединённой или союзной по отношению к матрице A .

С учётом данных определений, обратную матрицу можно записать в виде произведения союзной матрицы $\tilde{A}$ на число $\frac{1}{\det A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}. \quad (3.4)$$



Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1} = A.$

2. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$

4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$

5. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$



Пример 3.1. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

◀ Вычислим определитель матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 5.$$

Находим все четыре алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11}(-1)^{1+1} \cdot 3 = 3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2, \\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение условия (3.1) $AA^{-1} = E$.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 + 1/5 & -2/5 + 2/5 \\ -3/5 + 3/5 & 2/5 + 3/5 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$



Пример 3.2. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

► Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 3 \cdot 9 + 1 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) = 27 - 2 - 20 = 5.$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Легко проверить, что условие (3.1)

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ выполняется. ◀



3.2. Решение матричных уравнений

Используя определение обратной матрицы, можно решать уравнения

$$AX = B, \quad (3.6)$$

в которых неизвестным является матрица X .

Естественно, матрица A должна быть квадратной $[n \times n]$. При этом размерность матрицы B должна иметь размерность $n \times m$. Тогда размерность искомой матрицы X — $[n \times m]$.

- Умножаем обе части уравнения на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

- Используя сочетательный закон умножения матриц, можно записать:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

- Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение матричного уравнения получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (3.7)$$



Для решения матричного уравнения

$$X \cdot A = B, \quad (3.8)$$

умножаем обе части уравнения справа на матрицу A^{-1} :

$$(X \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X \cdot (A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}.$$

Получаем:

$$X = B \cdot A^{-1}. \quad (3.9)$$



Пример 3.3. Решить матричное уравнение $AX = B$, где
 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

► Находим обратную матрицу A^{-1} .

$$|A| = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10; \quad A_{11} = 4; \quad A_{21} = -2; \quad A_{12} = -1; \quad A_{22} = 3.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & -1,2 & 0,6 \\ 0,2 & -0,2 & -0,9 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & -1,2 & 0,6 \\ 0,2 & -0,2 & -0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} 0,2 & -1,2 & 0,6 \\ 0,2 & -0,2 & -0,9 \end{pmatrix}$$



Пример 3.4. Решить матричное уравнение $XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Сделать проверку.}$$

► Находим обратную матрицу A^{-1} .

$$|A| = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 = 1; \quad A_{11} = 8; \quad A_{21} = -3; \quad A_{12} = -5; \quad A_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 21 & -8 \\ 24 & -9 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 21 & -8 \\ 24 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

$$\text{Ответ: } X = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 21 & -8 \\ 24 & -9 \end{pmatrix}.$$



Если число неизвестных системы равно числу уравнений и матрица A системы невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$, то уравнение

$$A \cdot X = B \quad (3.10)$$

решается следующим образом:

- Умножаем обе части уравнения на матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

- Используя сочетательный закон умножения матриц, можно записать:

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

- Так как $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение матричного уравнения получится в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (3.11)$$



Пример 3.5. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

◀ В матричной форме эта система запишется в виде $AX = B$.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$.

◀ Находим алгебраические дополнения элементов этого определителя по формулам $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 3 \cdot 9 + 1 \cdot (-2) + 5 \cdot (-4) = 27 - 2 - 20 = 5.$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$



Решение системы записываем в виде

$$X = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда на основании определения равенства матриц следует, что $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти значения неизвестных удовлетворяют данной системе.



3.3. Формулы Крамера

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными.

[illegible]

Запишем эту систему в матричном виде $AX = B(3.6)$. Предположим, что $\det A \neq 0$.

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots \dots \dots \dots \\ A_{1n} A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

[illegible]







[illegible]

С учётом этих обозначений формулы (3.11) можно переписать в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{|A|}. \quad (3.12)$$

Формулы (3.12) называются формулами Крамера¹ и являются следствием формулы (3.7).



Рассмотрим примеры применения формул Крамера для системы двух простых уравнений, $n = 2$, уже рассматриваемых выше в качестве примеров теоремы Кронекера-Капелли.

ПРИМЕР 3.6. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

Здесь

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Используя формулы Крамера, получаем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \frac{-3}{-2} = 1,5; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \frac{1}{-2} = -0,5.$$

ПРИМЕР 3.7. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

Здесь

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, система имеет бесконечное число решений.



ПРИМЕР 3.8. Решить систему $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$

Здесь

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, система несовместна.



ПРИМЕР 3.3. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 10 = 5,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 10 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1 + 3) = 10.$$

Используя формулы Крамера, найдем:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{|A|} = \frac{5}{5} = 1; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{|A|} = \frac{-5}{5} = -1; x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{|A|} = \frac{10}{5} = 2.$$



Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Напомним, что минором k -го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Её миноры $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

Все элементы матрицы A являются минорами первого порядка.



Определение 4.1. Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля её миноров.

Если ранг матрицы A равен r , то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор порядка, большего чем r , равен нулю. Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственным минором четвёртого порядка является определитель данной матрицы $|A|$, который равен нулю, как определитель, все элементы одной из строк которого равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля, например

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Следовательно, ранг данной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.



Элементарные преобразования матриц

При определении ранга матрицы, как правило, приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить этот процесс, применяют специальные приемы. Прежде чем излагать эти приемы, введем понятие об *элементарных преобразованиях матрицы*.

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*.



Пример 4.1. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение: Вычтем из 2-ой строки 1-ую, умноженную на 2 и из третьей строки вычтем первую строку

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_1 вторую строку, умноженную на 2, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_2 строку, состоящую из нулей, получаем матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ранг которой равен, очевидно, двум. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен двум, т.е. $r(A) = 2$.

Здесь для преобразования матриц мы использовали метод Гаусса.



Метод окаймляющих миноров

Определение 4.2. Пусть M_k – минор k -го порядка матрицы A . Окаймляющим минором для минора M_k называется любой минор k к которому добавили одну строку и один столбец, не входящие в минор M_k .

Теорема 4.1. Если в матрице A есть отличный от нуля минор k -го порядка, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы A равен k .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём отличный от нуля минор второго порядка. Начнём с углового минора $M_{2_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0$.

Вместо второго столбца возьмём третий

$$M_{2_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = 2 \neq 0.$$

Следовательно $r(A) \geq 2$.



Метод окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Расширяем минор M_{23} до третьего порядка, добавляя к нему ещё одну строку и один столбец. Таких миноров три. Перечислим их:

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \quad M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}; \quad M_{35} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Применяем к этим определителям элементарные преобразования используемые при решении примера (3.1).

Вычтем из 2-ой строчки 1-ую, умноженную на 2 и из третьей строки вычтем первую строку

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}; \quad M_{35} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_1 вторую строку, умноженную на 2, получим определители

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{34} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad M_{35} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Все они равны нулю, следовательно, $r(A) = 2$.



Спасибо за внимание