РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 3

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Лекция 4
Системы линейных уравнений

Основные понятия теории систем линейных алгебраических уравнений: частное решение, общее решение; совместность и несовместность системы; однородные и неоднородные системы; матрица системы и расширенная матрица системы.

Берков Николай Андреевич

22 сентября 2023г

Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (4.1)$$

Напомним, что минором k-го порядка матрицы A называется определитель квадратной матрицы, получающийся из данной матрицы выделением произвольных k строк и k столбцов.

Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Её миноры $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$

Все элементы матрицы A являются минорами первого порядка.

***Определение* 4.1.** *Рангом матрицы называется наибольший из порядков отличных от нуля её миноров.*

Если ранг матрицы A равен r, то это означает, что в матрице A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r, но всякий минор порядка, большего чем r, равен нулю. Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственным минором четвёртого порядка является определитель данной матрицы $|A|$, который равен нулю,как определитель, все элементы одной из строк которого равны нулю. Один из миноров третьего порядка отличен от нуля, например

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Следовательно, ранг данной матрицы равен 3, т.е. $r(A) = 3$.

Элементарные преобразования матриц

При определении ранга матрицы, как правило, приходится вычислять большое число определителей. Чтобы облегчить этот процесс, применяют специальные приемы. Прежде чем излагать эти приемы, введем понятие об *элементарных преобразованиях матрицы*.

Элементарными называются следующие преобразования:

- умножение всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на одно и тоже число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и тоже число;
- перемена местами строк (столбцов) матрицы;
- отбрасывание строк (столбцов) матрицы, все элементы которых равны нулю.

Матрицы, получающиеся одна из другой при элементарных преобразованиях, называются *эквивалентными*.

Пример 4.1. *Вычислить ранг матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е: Вычтем из 2-ой строчки 1-ую, умноженную на 2 и из третьей строки вычтем первую строку

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_1 вторую строку, умноженную на 2, получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбрасывая в матрице A_2 строку, состоящую из нулей, получаем матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

ранг которой равен, очевидно, двум. Следовательно, ранг данной матрицы A также равен двум, т.е. $r(A) = 2$.

Здесь для преобразования матриц мы использовали метод Гаусса.

Метод окаймляющих миноров

Определение 4.2. *Пусть* M_k – *минор* k*-го порядка матрицы* A. *Окаймляющим минором для минора* M_k *называется любой минор к которому добавили одну строку и один столбец, не входящие в минор* M_k.

Теорема 4.1. *Если в матрице* A *есть отличный от нуля минор* k*-го порядка, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то ранг матрицы* A *равен* k.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём отличный от нуля минор второго порядка. Начнём с углового минора $M_{2_2} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-4) = 0.$

Вместо второго столбца возьмём третий

$$M_{2_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = 2 \neq 0.$$

Следовательно $r(A) \geqslant 2$.

Метод окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Расширяем минор M_2^2 до третьего порядка, добавляя к нему ещё одну строку и один столбец. Таких миноров три. Перечислим их:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}; \quad M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Применяем к этим определителям элементарные преобразования используемые при решении примера (3.1).

Вычтем из 2-ой строчки 1-ую, умноженную на 2 и из третьей строки вычтем первую строку

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}; \quad M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix}; \quad M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычитая из третьей строки матрицы A_1 вторую строку, умноженную на 2, получим определители

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; M_3^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; M_3^3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Все они равны нулю, следовательно, $r(A) = 2$.

4.3. Система линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.2}$$

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система линейных уравнений называется определённой, если она имеет единственное решение, и неопределённой, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две совместные системы уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое решение второй системы является решением первой.

Можно доказать, что следующие преобразования переводят систему уравнений в равносильную ей:

- перемена местами двух любых уравнений;
- умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;
- перемена слагаемых, содержащих разные неизвестные, местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

Эти преобразования, по аналогии с элементарными преобразованиями матриц, будем называть элементарными.

Возможно, что после нескольких таких преобразований в системе появится уравнение, все коэффициенты которого и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, оно может быть отброшено. В этом случае мы получим систему, равносильную данной и содержащую на одно уравнение меньше, чем данная система.

Если в результате применения элементарных преобразований в системе появится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то это указывает на то, что уравнение не удовлетворяет никаким значениям неизвестных и, следовательно, полученная система несовместна. Поэтому несовместной является и первоначальная система.

Матричное представление системы линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = b_i,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Произведение $A \cdot X$ есть матрица–столбец

$$
A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}
$$

Тогда система линейных уравнений может быть записана в матричном виде

$$
A \cdot X = B.
$$

Теорема 4.2. *(Теорема Кронекера–Капелли)*

Для того чтобы система линейных уравнений была **совместной**, *необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

был равен рангу её расширенной матрицы

$$(A \,|\, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

т.е. $r(A) = r(A \,|\, B)$.

Расширенная матрица $(A|B)$ получается из матрицы системы добавлением столбца, состоящего из свободных членов уравнений системы.

Если ранги матриц A и $(A|B)$ равны числу неизвестных, т.е. $r(A)=r(A|B)=n$ система уравнений имеет единственное решение.

Если же ранги матрицы равны между собой и меньше числа неизвестных, т.е. $r(A)=r(A|B)<n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим примеры применения теорема Кронекера–Капелли для системы двух уравнений, $n=2$.

Пример 4.2. *Решить систему* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2. \end{cases}$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A\,|\,B) = 2 = n$. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение. Решаем её. К первому уравнению добавим второе и от второго – вычтем первое.

$$\begin{cases} 2x_1 = 3, \\ -2x_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}5, \\ x_2 = -0{,}5. \end{cases}$$

Пример 4.3. *Решить систему* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A\,|\,B) = 1 < n$. Следовательно, система совместна и имеет бесконечное число решений.

Второе уравнение данной системы можно отбросить т.к. при делении его на 2, оно совпадает с первый уравнением.

Получаем: $x_1 = 1 - x_2$. Придавая различные значения переменной $x_2 = c, c \in \mathbb{R}$, получаем различные решения заданной системы. Всё многообразия решений можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c \\ c \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

Пример 4.4. *Решить систему* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3. \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A \,|\, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1$, $r(A \,|\, B) = 2$. Следовательно, система несовместна.

4.5. Метод Гаусса для систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Метод Гаусса заключается в следующем. Допустим, что в системе (4.2) коэффициент при первом неизвестном $a_{11} \neq 0$.

Если $a_{11} = 0$, то всегда можно переставить строки или перенумеровать неизвестные так, чтобы коэффициент при первом неизвестном стал отличен от нуля.

Исключим сначала неизвестное x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого прежде всего разделим обе части первого уравнения на коэффициент $a_{11} \neq 0$; тогда получим новую систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \dfrac{a_{1k}}{a_{11}} x_k + \cdots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_k + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4.10}$$

Умножим теперь первое уравнение системы (4.10) на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим новую систему, также равносильную данной:

$$
\begin{cases}
x_1 + & a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1k}x_k + \dots + a'_{1n}x_n & = b'_1, \\
& a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2k}x_k + \dots + a'_{2n}x_n & = b'_2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
& a'_{i2}x_2 + \dots + a'_{ik}x_k + \dots + a'_{in}x_n & = b'_i, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
& a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mk}x_k + \dots + a'_{mn}x_n & = b'_m.
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
a'_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{i1}; \qquad i = 2, 3, \dots, n;
$$

$$
b'_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad b'_i = b_i - \frac{b_1}{a_{11}} a_{i1}; \qquad i = 2, 3, \dots, m.
$$

Разделим теперь второе уравнение системы (4.11) на коэффициент a'_{22}, предполагая, что он отличен от нуля; затем умножим второе уравнение полученной системы последовательно на $a'_{32}, \dots, a'_{i2}, \dots, a'_{m2}$ и вычтем поочередно из соответствующих уравнений системы, кроме первого и второго.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то эта система несовместна. Ранг матрицы A системы (4.10) не равен рангу расширенной матрицы $(A \mid B)$.

$$r(A) \neq r(A \mid B)$$

В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1k}x_k + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1, \\ x_2 + \dots + \tilde{a}_{2k}x_k + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n &= \tilde{b}_r. \end{aligned}\right. \tag{4.12}$$

(причём r < n), либо к системе

$$\left\{\begin{aligned} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1k}x_k + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1, \\ x_2 + \dots + \tilde{a}_{2k}x_k + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k + \dots + \tilde{a}_{kn}x_n &= \tilde{b}_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \tilde{b}_n. \end{aligned}\right. \tag{4.13}$$

Это был прямой ход метода Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_k + \cdots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = \tilde{b}_n. \end{cases} \tag{4.13}$$

Обратный ход метода Гаусса.

$$\begin{cases} x_n = \tilde{b}_n, \\ x_{n-1} = \tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1\ n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k = \tilde{b}_k - (\tilde{a}_{k\ k+1}x_{k+1} + \cdots + \tilde{a}_{kn}x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = \tilde{b}_1 - (\tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n). \end{cases} \tag{4.14}$$

Таким образом, если данная система уравнений (4.2) после выполнения ряда элементарных преобразований приводит к треугольной системе (4.13), то это означает, что система (4.2) является совместной и определённой.

Ранг матрицы A системы (4.10) равен рангу расширенной матрицы $(A \mid B)$ и равен числу неизвестных n.

$$r(A) = r(A \mid B) = r = n.$$

Если же данная система (4.2) после элементарных преобразований приводится к ступенчатой системе (4.12), то система (4.2) совместна и неопределённа.

$$r(A) = r(A \mid B) = r < n.$$

В самом деле, перенося в каждом из уравнений системы (4.12) члены с неизвестными $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть, получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1r}x_r = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1\ r+1}x_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{1n}x_n, \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2r}x_r = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2\ r+1}x_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{r\ r+1}x_{r+1} - \cdots - \tilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ldots, \alpha_n$, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, которые называются базисными. Так как числа $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \ \ldots, \alpha_n$ могут иметь различные значения, то исходная система (3.2) имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 4.1. *Часто при преобразованиях системы по Гауссу целесообразно переставлять строки и столбцы с неизвестными.*

Пример 4.1. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение: Совершим элементарные преобразования, которые каждый раз будут приводить нас к равносильной исходной системе уравнений.

- Переставим местами первое и второе уравнения системы для удобства дальнейших преобразований:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

- Умножим первое уравнение на 3 и вычтем из второго, умножим первое уравнение на 5 и вычтем из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -7x_2 - x_3 = 5, \\ -12x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

- Поменяем члены, содержащие x_2 и x_3 местами,

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -x_3 - 12x_2 = 10. \end{cases}$$

- К 3-му уравнению добавим второе

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ x_3 + 7x_2 = -5, \\ -5x_2 = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 3x_2 = 0, \\ \quad\quad x_3 + 7x_2 = -5, \\ \quad\quad\quad\quad -5x_2 = 5. \end{cases}$$

Полученная треугольная система является совместной, определённой и равносильной исходной. Из этой системы последовательно находим:

$x_2 = -1;$
$x_3 = -5 - 7x_2 = 2;$
$x_1 = -3x_2 - x_3 = (-3)(-1) - 2 = 3 - 2 = 1.$ ◄
Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$.

Прежде, чем перейти к решению других примеров по методу Гаусса, заметим, что *нет необходимости каждый раз переписывать системы уравнений. Все преобразования можно проводить над расширенной матрицей системы.*

Пример 4.2. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу системы и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса

Преобразования строк (2) -2(1); (3) -5(1)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right) \sim$$

(2) умножаем на -1; (3) делим на -2; из (2) вычтем (3)

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

убираем нулевую строку

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Отсюда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(A \mid B) = 2$, а количество неизвестных равно 4. Следовательно, система уравнений имеет бесчисленное множество решений.

Последняя матрица в преобразованиях есть расширенная матрица системы.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ \qquad 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Если в качестве базисных неизвестных выбрать, например, x_1 и x_2, тогда свободными неизвестными будут x_3 и x_4 после элементарных преобразований следует

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}x_3 + \dfrac{2}{11}x_4, \\ \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}x_3 - \dfrac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = 1$, получим $x_1 = -1, x_2 = -1$, т.е. некоторое частное решение системы уравнений.

Если значения свободных неизвестных принять равным $x_3 = 0$, $x_4 = 0$: получим $x_1 = \dfrac{1}{11}, x_2 = \dfrac{2}{11}$, некоторое другое частное решение данной системы уравнений.

Пример 4.3. *Решить систему уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 8x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Р е ш е н и е: Составляем расширенную матрицу и выполняем над её строками элементарные преобразования. Поскольку при применении метода Гаусса к данной системе целесообразно менять местами слагаемые, содержащие неизвестные, будем указывать их над соответствующими столбцами.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 5 & 12 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 6 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -22 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -22 \end{array}\right)$$

Полученной матрице соответствует система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + 2x_1 + x_3 - x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 &= 12, \\ x_4 &= 0, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -22. \end{aligned} \right.$$

Полученной расширенной матрице соответствует система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 + 2x_1 + x_3 - x_4 &= 8, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_4 &= 12, \\ x_4 &= 0, \\ 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= -22. \end{aligned} \right.$$

Так как последнее уравнение этой системы противоречиво, то она является несовместной. Следовательно, несовместна и равносильная ей исходная система уравнений, т.е. она не имеет решения.

4.2. Метод Гаусса для вычисления обратной матрицы.

Для матриц больших порядков обращение матриц по формулам (2.11) затруднительно из-за большого объёма вычислений. На практике применяют метод Гаусса. Этот же метод применяют и для вычисления определителей больших порядков, приводя матрицу к треугольному виду.

Пример 4.4. *Методом Гаусса найти обратную матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу системы в правой части которой находится единичная матрица и выполним над ней элементарные преобразования:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right)$$

Слева получили единичную матрицу, а справа — обратную.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Пример 4.5. *Методом Гаусса найти обратную матрицу*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу в правой части которой находится единичная матрица и выполним над ней элементарные преобразования: из 3-ей строки вычтем 1-ую умноженную на 2, а затем из 1-ой вычтем 2-ую умноженную на 2. Получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь к 1-ой строке добавим 3-ю умноженную 3 и к 2-ой 3-ю строку.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

И наконец, к 2-ой строке добавим 1-ую и переставим 1-ую строку на место 3-ей.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -4 & 3 \end{array}\right).$$

Слева получили единичную матрицу, а справа — обратную.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Спасибо за внимание