РТУ МИРЭА

Кафедра высшая математика 3

Лекция 5
Элементы линейной алгебры

Общая структура решения системы линейных неоднородных уравнений.

Берков Николай Андреевич

29 октября 2023г

Лекция 5. Общая структура решения системы линейных неоднородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (5.2)$$

или в матричном виде $$AX = B,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Определение 5.1. *Упорядоченный набор чисел* $\{x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0\}$ *называется частным решением СЛАУ (5.1), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем равенства.*

Частное решение системы линейных уравнений может также быть записано в виде матрицы-столбца

$$X^0 = (x_1^0 \;\; x_2^0 \;\; \dots \;\; x_n^0)^T.$$

Определение 5.2. *Совокупность всех частных решений СЛАУ (5.1) называется* ***общим решением*** *системы (5.1).*

Определение 5.3. *Матрица* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *называется основной матрицей системы (5.1), а матрица*

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (5.6)$$

— расширенной матрицей этой системы.

Определение 5.4. *Система линейных алгебраических уравнений (5.1) называется* **однородной** *(ОСЛАУ), если* $b_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$

Её можно записать в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_j + \cdots + a_{in}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mk}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

или в матричном виде

$$AX = 0. \tag{5.7}$$

Определение 5.5. *Система линейных алгебраических уравнений (5.1) называется* **неоднородной** *(НСЛАУ), если не все* $b_i = 0$.

5.2. Фундаментальная система решений

При построении общего решения системы (5.1) воспользуемся следующими свойствами решений СЛАУ: $AX = B$ (5.1) $AX = 0.$ (5.6)

1) Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (5.6) также является её частным решением.

Пусть X_1 и X_2 — решения ОСЛАУ (5.7), то есть $AX_1 = \mathbf{0}$ и $AX_2 = \mathbf{0}$. Рассмотрим линейную комбинацию этих матриц-столбцов: $Y = c_1X_1 + c_2X_2$. Применяя свойства операций над матрицами получим:

$$AY = A(c_1X_1 + c_2X_2) = c_1AX_1 + c_2AX_2 = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = \mathbf{0}.$$

2) Сумма некоторого частного решения однородной системы (5.6) и некоторого частного решения неоднородной системы (5.1) является частным решением неоднородной системы (5.1).

Пусть X — частное решение ОСЛАУ (5.6), а Y — некоторое частное решение НСЛАУ (5.1). Тогда,

$$A(X + Y) = AX + AY = \mathbf{0} + B = B.$$

3) Разность двух частных решений неоднородной системы (5.1) является частным решением однородной системы (5.6)).

$AX = B$ (5.1) $AX = 0.$ (5.6)

Пусть X и Y — частные решения НСЛАУ (5.1). Следовательно, выполняются равенства $AX = B$ и $AY = B$. Тогда:

$$A(X - Y) = AX - AY = B - B = \mathbf{0}.$$

4) Из доказанных свойств 1-3 следует,что **общее решение неоднородной системы уравнений (X) есть общее решение однородной (X_{OO}) плюс некоторое частное решение неоднородной систем ($X_{ч}$).**

$$X = X_{OO} + X_{ч}. \qquad (5.8)$$

5) Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у неё есть, по крайней мере, одно частное, называемое тривиальным, решение, для которого все неизвестные имеют нулевое значение.

Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде матриц-столбцов, то, используя операции сравнения, сложения и умножения на число для матриц, а также свойство 1, можно ввести понятие линейной зависимости решений СЛАУ.

Определение 5.6. *Система матриц-столбцов* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, *состоящих из* m *строк* $(m \geq n)$, *является линейно независимой, если их линейная комбинация* $c_1X_1+c_2X_2+\ldots+c_nX_n$, *равна нулевой матрице, тогда и только тогда, когда все* $c_i, i = 1, 2, \ldots n$ *равны нулю.*

Рассмотрим пример, который часто будем использовать в дальнейшем

$$\text{Пусть } X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$c_1X_1 + c_2X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_1x_3 + c_2y_3 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что полученная матрица может быть равной нулевой матрице $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, только при $c_1 = c_2 = 0$.

Рассмотрим вначале совместную НСЛАУ (5.1). В предыдущей лекции доказывалось, что при помощи элементарных преобразований, не изменяющих решение системы, и замене переменных СЛАУ можно привести либо к ступенчатому виду, когда $r(A) < n$, либо к треугольному, при $n = r(A)$.

r < n
$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_r + \cdots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r. \end{cases}$$

при $n = r(A)$
$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \cdots + \tilde{a}_{1k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad\quad x_2 + \cdots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_k + \cdots + \tilde{a}_{kn}x_n = \tilde{b}_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \tilde{b}_n. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $r(A) < n$. Перенося в каждом из уравнений системы члены с неизвестными $x_{r+1}, \dots, x_n$ в правую часть, получим систему вида

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1\ r+1}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{1n}x_n, \\ \qquad x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2\ r+1}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_r = \tilde{b}_r - \tilde{a}_{r\ r+1}x_{r+1} - \dots - \tilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ называются базисными (основными, главными, зависимыми), а неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ — свободными (параметрическими, независимыми). Придавая свободным неизвестным произвольные значения $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все базисные неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$. Так как числа $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$ могут иметь различные значения, то исходная система (5.1) имеет бесчисленное множество решений.

Замечание 5.1. *В качестве базовых неизвестных надо выбирать такие неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$, при которых ранг левой части системы записанной в виде (5.11) был равен r.*

Выполняя обратный ход метода Гаусса, выразим базисные неизвестные

Для ОСЛАУ решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1\ n-r} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2\ n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{r\ n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (5.15)$$

Тогда для НСЛАУ

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1\ n-r} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2\ n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{r\ n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_r \end{pmatrix}. \qquad (5.14)$$

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + k_{11}x_{r+1} + k_{12}x_{r+2} + \dots + k_{1n-r}x_n, \\ x_2 = d_2 + k_{21}x_{r+1} + k_{21}x_{r+2} + \dots + k_{2n-r}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = d_r + k_{r1}x_{r+1} + k_{r2}x_{r+2} + \dots + k_{rn-r}x_n. \end{cases}$$

Для ОСЛАУ решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1\ n-r} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2\ n-r} \\ .. & .. & \dots & \dots.. \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{r\ n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

Последовательно придавая свободным неизвестным элементарные значения в которых только один элемент равен 1, а остальные равны 0:

$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{5.15}$$

получаем систему $n-r$ независимых частных решений:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^{<n-r>} \\ \dots \\ x_r^{<n-r>} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{5.16}$$

Совокупность полученных решений будем называть нормальной ***фундаментальной системой*** решений.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 5.1. *Однородная система (5.6) имеет $n - r(A)$ линейно независимых частных решений.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_j + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_j + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_j + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (5.6)$$

Общее решение ОСЛАУ (5.6) может быть записано в виде линейной комбинации полученных частных решений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_{n-r} \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.18)$$

Или в общем виде

$$X_{OO} = c_1 X_1^0 + c_2 X_2^0 + \cdots + c_{n-r} X_{n-r}^0. \qquad (5.19)$$

Общее решение неоднородной системы (5.1) может быть записано формулой

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \dots \\ x_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_{n-r} \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_r^0 \\ x_{r+1}^0 \\ x_{r+2}^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

где $X_ч = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0, x_{r+1}^0, x_{r+2}^0, \dots, x_n^0)^T$ — некоторое частное решение НСЛАУ (5.1), а числа $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-r$ — произвольные константы.

Или в общем виде

$$X = X_{OO} + X_ч = c_1 X_1^0 + c_2 X_2^0 + \dots + c_{n-r} X_{n-r}^0 + X_ч. \qquad (5.21)$$

Пример 5.1. *Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+2x_2+5x_3+2x_4+7x_5 & = & 0, \\ 6x_1+4x_2+7x_3+4x_4+5x_5 & = & 0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4-11x_5 & = & 0, \\ 6x_1+4x_2+x_3+4x_4-13x_5 & = & 0. \end{array}\right. \tag{5.19}$$

Решение: Выпишем основную матрицу A системы и выполним над ней элементарные преобразования

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем три строки матрицы А: из 4-ой строки вычтем вторую, а затем, из 3-ей вычтем 1-ую и из 2-ой вычтем 1-ю умноженную на 2.

Получаем матрицу A_1, которая эквивалентна A.

$$A1=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Теперь из 3-ей и 4-ой строк вычтем 2-ю умноженную на 2.

$$A2=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A3=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отбрасываем нулевые строки и делим 2-ую строку на -3.

$$A3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Можно ещё из 1-ой строки вычесть 2-ую умноженную на 5

$$A4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad A4 = \begin{pmatrix} 3 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 2 & -8 \\ 0 & & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $r(A) = 2$, а количество неизвестных равно 5. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли, система уравнений совместна, но неопределённа, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

Запишем полученную упрощённую систему в стандартном виде

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + \quad 2x_4 \quad -8x_5 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad\quad +3x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_2 и x_3, тогда свободными неизвестными будут x_1, x_4 и x_5. Выразим базисные неизвестные через свободные

$$\begin{cases} x_2 = -1{,}5x_1 - x_4 + 4x_5, \\ x_3 = -3x_5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -1{,}5x_1 - x_4 + 4x_5, \\ x_3 = -3x_5. \end{cases}$$

Запишем полученное решение в виде:
$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -1{,}5x_1 - x_4 + 4x_5, \\ x_3 = -3x_5, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = x_5. \end{cases}$$

Свободные неизвестные x_1, x_4 и x_5 могут принимать произвольные значения, обозначим их c_1, c_2 и c_3, соответственно. Общее решение исследуемой системы уравнений можно представить в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы являются матрицы-столбцы:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0, X_1^0 и X_3^0 образуют фундаментальную систему решений ОСЛАУ $AX = \mathbf{0}$.

Эти матрицы-столбцы являются линейно независимые, так как их линейная комбинация равна нулевой матрице, тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

$$c_1X_1^0 + c_2X_2^0 + c_3X_3^0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ -1{,}5c_1 - c_2 + 4c_3 \\ -3c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Далее проверяем, что эти матрицы-столбцы являются решением ОСЛАУ $AX = 0$.

$$A\cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-6 \\ 3-3 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-4 \\ 2-2 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_3^0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-15+7 \\ 16-21+5 \\ 8+3-11 \\ 16-3-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решения системы (5.22) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0 + c_3 \cdot X_3^0,$$

где c_1, c_2 и c_3 — произвольные действительные числа.

Ответ: $$X = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Пример 5.2. *Исследовать на совместность и найти общее решение для системы уравнений:*

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 1. \end{cases} \tag{5.20}$$

Р е ш е н и е: Составим расширенную матрицу $C = (A|B)$ системы и выполним над ней элементарные преобразования, указанные в методе Гаусса

$$C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Преобразуем три строки матрицы С: из 1-ой и 3-ей строк вычтем вторую, а затем, из второй вычтем 4-ю умноженную на 2. Получаем расширенную матрицу C_1, которая эквивалентна C.

$$C_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Теперь из 4-ой строки вычтем 1-ую строку, а 3-ю строку разделим на 2.

$$C_2 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Далее, ко 2-ой строке добавим 3-ю, умноженную на 13 и из 4-ой вычтем 3-ю умноженную на 6.

$$C_3 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -14 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

И наконец, ко 2-ой строке матрицы C_3 добавим 4-ю строку умноженную на 2 и уберём полученную нулевую строку

$$C_4 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right) \quad \sim C = \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Отсюда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $r(A) = r(A|B) = 3$, а количество неизвестных равно 5. Следовательно, согласно теореме Кронекера-Капелли, система уравнений совместна, но не определённа, т.е. имеет бесчисленное множество решений.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \end{array}\right)$$

Запишем полученную упрощённую систему в стандартном виде

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_3 - x_5 = -2, \\ 2x_4 + 7x_5 = 12. \end{cases}$$

Если в качестве базисных неизвестных выбираем переменные x_2, x_3 и x_4, тогда свободными неизвестными будут x_1 и x_5.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = -2x_1 - x_5 + 1, \\ x_3 = x_5 - 2, \\ x_4 = -3{,}5x_5 + 6. \end{cases}$$

Выразим через свободные неизвестные компоненту x_2.

$$x_2 = -x_3 - x_4 - 2x_1 - x_5 + 1 = -x_5 + 2 + 3{,}5x_5 - 6 - 2x_1 - x_5 + 1 = -2x_1 + 1{,}5x_5 - 3.$$

Получили
$$\begin{cases} x_2 = -2x_1 + 1{,}5x_5 - 3, \\ x_3 = x_5 - 2, \\ x_4 = -3{,}5x_5 + 6. \end{cases}$$

Запишем полученное решение в виде: $\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = -2x_1 + 1{,}5x_5 - 3, \\ x_3 = x_5 - 2, \\ x_4 = -3{,}5x_5 + 6, \\ x_5 = x_5. \end{cases}$

Общее решение запишем в виде линейной комбинации

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

При этом сумма первых двух матриц-столбцов является общим решением однородной системы с основной матрицей A — X_{OO}, а последнее слагаемое является частным решением заданной неоднородной системы (5.20) — $X_ч$.

$$X_{OO} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ X_ч = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальной системой решений (ФСР) исследуемой однородной системы являются линейно независимые матрицы-столбцы $\{X_1^0, X_2^0\}$:

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что матрицы-столбцы X_1^0 и X_2^0 образуют фундаментальную систему решений. Подставляем эти матрицы-столбцы в ОСЛАУ

$$A \cdot X_1^0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 4-4 \\ 4-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot X_2^0 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5+2-10{,}5+4 \\ 3+1-7+3 \\ 3+3-7+1 \\ 1{,}5+7-10{,}5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$AX_{\text{ч}} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9-4+18 \\ -6-2+12 \\ -6-6+12 \\ -3-14+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получили правую часть системы.

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = & 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 & = & 1. \end{cases}$$

Общее решения системы (5.23) представляет собой сумму линейной комбинации матриц-строк, образующих фундаментальную систему решений ОСЛАУ и произвольное частное решение НСЛАУ.

$$X = c_1 \cdot X_1^0 + c_2 \cdot X_2^0 + X_ч,$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные числа.

Ответ:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \\ -3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Спасибо за внимание