$$z^n = |z|^n(\cos(n \operatorname{Arg} z) + i\sin(n \operatorname{Arg} z)).$$

Основные формулы ТФКП

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\arg w + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x(\cos y + i\sin y).$$ формула Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$\ln z = \ln|z| + i\arg z$ и $\operatorname{Ln} z = \ln z + i2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$ $z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}.$

$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}.$ $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ и $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$

$\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ и $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}.$ $\operatorname{sh} z = -i\sin iz,\ \operatorname{ch} z = \cos iz,$ $\sin z = -i\operatorname{sh} iz,\ \cos z = \operatorname{ch} iz.$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2-1}),$$

sin(α - β) = sinα cosβ - cosα sinβ

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

cos(α - β) = cosα cosβ + sinα sinβ

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Интегральная теорема Коши. Если G односвязная область и $f(z)$ аналитическая функция в G, то для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, лежащей в области G

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

интегральная формула Коши:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \qquad \int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0),$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} \qquad R = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

$$
\begin{aligned}
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \quad |z|<\infty,\\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\\
&\qquad\qquad |z|<\infty,\\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad |z|<\infty,\\
\operatorname{sh} z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \quad |z|<\infty,\\
\operatorname{ch} z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad |z|<\infty,\\
(1+z)^m &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n = 1+mz+\frac{m(m-1)}{2!}z^2+\\
&+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n+\ldots,\\
&\qquad\qquad m\in\mathbb{Z},\ |z|<1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+z} &= 1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^n z^n+\ldots, \quad |z|<1\\
\frac{1}{1-z} &= 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots, \quad |z|<1.
\end{aligned}
$$

Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n\in\mathbb{Z},$$

где Γ – окружность $|z-z_0|=\rho,\ r<\rho<R$, называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $V_{R,r} := \{z\,|r<|z-z_0|<R\}$.

Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$$

называют главной частью ряда Лорана. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

называют правильной частью ряда Лорана.

1. Если в разложении в ряд Лорана отсутствует главная часть, т.е. члены с отрицательными степенями

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

то точка $z=a$ называется устранимой особой точкой функции f.

2. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит конечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{-1} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ m>0,\ c_m \neq 0,$$

то точка $z = a$ называется полюсом порядка m функции f.

Изолированная особая точка $z = a$ функции f является полюсом тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty.$$

3. Если в разложении в ряд Лорана главная часть содержит бесконечное число членов

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

то точка $z = a$ называется существенно особой точкой функции f.

Для того, чтобы изолированная особая точка $z = a$ была существенно особой точкой функции f, необходимо и достаточно, чтобы f не имела предела при $z \to a$.

Вычетом аналитической функции f относительно её изолированной особой точки $z = a$ называется коэффициент c_{-1} при первой отрицательной степени разложения функции f в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Обозначение вычета:

$$c_{-1} = \operatorname*{res}_a f(z).$$

Принимая во внимание интегральное преставление для коэффициентов ряда Лорана, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz,$$

где Γ окружность с центром в точке $z = a$, $\Gamma \subset O_a$ (O_a - окрестность точки, где функция f аналитическая).

Пусть $z = a$ полюс функции f порядка m. Вычет функции f в точке $z = a$ может быть найден по формуле:

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-a)^{m-1}).$$

Для полюса первого порядка получим

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

Часто оказывается полезной небольшая модификация последней формулы.

Пусть функция f в окрестности полюса первого порядка $z = a$ имеет вид

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические в точке $z = a$ функции, причём $\varphi(a) \neq 0,\ \psi(a) = 0,\ \psi'(a) \neq 0$, имеем

$$\operatorname*{res}_a f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Итак, окончательно, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f(z).$$

$$\oint\limits_L (z-a)^m dz = \begin{cases} 2\pi i,\ m = -1, \\ 0,\ m \neq -1. \end{cases}$$

Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z^5}{(z+1)^4}$.

$$\operatorname{Res}\frac{z^5}{(z+1)^4}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}\frac{d^3}{dz^3}\left((z+1)^4\frac{z^5}{(z+1)^4}\right) =$$
$$= \frac{1}{3!}\lim_{z\to-1}(z^5)^{III} = \frac{1}{3!}\lim_{z\to-1} 5\cdot4\cdot3z^2 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10.$$

Теорема 59.3. *Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитическая в ограниченной замкнутой области $\overline{S}$ (см. лекцию 35), границей которой является контур L, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in S$, $k = 1, 2 \ldots, n$, то интеграл от L в положительном направлении равен сумме вычетов $f(z)$ в этих особых точках, умноженной на $2\pi i$*

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k). \tag{59.11}$$

Вычислить $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4 + 3z^2 - 4}$.

$$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=1} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Res}\frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=-1}\right).$$

$$\operatorname{Res}\frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=a} = \frac{e^a}{4a^3+6a}, \quad \oint\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4} = 2\pi i\left(\frac{e}{10} - \frac{1}{10e}\right) = \frac{\pi i}{5e}(e^2-1).$$

Теорема 59.4. *Если функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} z \geq 0$ за исключением особых точек a_j, $j = 1, 2, \ldots n$ $\mathrm{Im} a_j > 0$, кроме того, для $f(z)$ бесконечно удалённая точка является нулём порядка не ниже второго, то имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(a_j). \tag{59.12}$$

Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$. $a_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i \pm 1)$; $\mathrm{Res}\dfrac{z^2+1}{z^4+1}\Big|_{a_{1,2}} = \dfrac{a_{1,2}^2+1}{4a_{1,2}^3} = \dfrac{\frac{1}{2}(i^2 \pm 2i + 1) + 1}{\frac{4}{2\sqrt{2}}(i^3 \pm 3i^2 + 3i \pm 1)} =$

$$= \frac{\pm i + 1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(i \mp 1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1 \pm i}{i \mp 1} \cdot \frac{i \pm 1}{i \pm 1} = \frac{\sqrt{2}(i \pm i^2 \pm 1 + i)}{4(i^2 - 1)} = -\frac{\sqrt{2}i}{4}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \pi\sqrt{2}.$$

Теорема 59.5. *Если функция $f(z) = g(z)e^{i\alpha z}$, где $\alpha > 0$, $g(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$, является аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im} z \geq 0$ за исключением особых точек a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ $(\mathrm{Im} a_j > 0)$ и простых полюсов x_k, $k = 1, \ldots, m$ расположенных на оси x (рис. 135), то имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(a_j) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res} f(x_k)\right). \tag{59.13}$$

Найти $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ *и* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ и $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 59.5, для неё $\alpha = 1$, $g(z) = \frac{1}{z} \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Она имеет один простой полюс в точке $z = 0$ и, следовательно, $\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z}\Big|_{z=0} = \frac{e^{iz}}{1}\Big|_{z=0} = e^0 = 1$.

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\pi i\frac{1}{2}\,\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z}\Big|_{z=0} = \pi i.$$

Откуда, приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$$