Теорема 19.2. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой δ-окрестности, т. е. для всех $x \in (|x-x_0| \leqslant \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M, то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к $f(x)$ степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{19.13}$$

Разложение основных функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ |x| < \infty,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ |x| < \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!},\ x \in (-1; 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!},\ |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x| < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\ |x| \leq 1.$$

Пример решения задачи 19 типового расчета

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\ln(1-2x)-tg\,x}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}$$

$$\sin 3x = 3x+\overline{o}(x^2)$$

$$\ln(1-2x) = -2x-\frac{(-2x)^2}{2}+\overline{o}(x^2) = -2x-2x^2+\overline{o}(x^2)$$

$$tg\,x = x+\overline{o}(x^2)$$

числитель $= 3x-2x-x-2x^2+\overline{o}(x^2) = -2x^2+\overline{o}(x^2)$

$$\sqrt[3]{1+3x} = 1+\frac{1}{3}\cdot 3x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot(3x)^2+\overline{o}(x^2) = 1+x-x^2+\overline{o}(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} = 1+\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot(2x)^2+\overline{o}(x^2) = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\overline{o}(x^2) = -\frac{1}{2}x^2+\overline{o}(x^2)$$

знаменатель $= 1+x-x^2-1-x+\frac{1}{2}x^2+\overline{o}(x^2) = -\frac{1}{2}x^2+\overline{o}(x^2)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\ln(1-2x)-tg\,x}{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2+\overline{o}(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2+\overline{o}(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{-2+\overline{o}(1)}{-\frac{1}{2}+\overline{o}(1)} = 4$$

Пример 19.5. *Показать, что*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{n^2-m^2}{2}\ .$$

$\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+O(x^4)$

и, следовательно,

$$\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2}=\frac{1-\dfrac{m^2x^2}{2}+O(x^4)-1+\dfrac{n^2x^2}{2}+O(x^4)}{x^2}=$$

$$=\frac{n^2-m^2}{2}+\frac{O(x^4)}{x^2}=\frac{n^2-m^2}{2}+O(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{n^2-m^2}{2}.$$

Пример 19.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Р е ш е н и е: Из (19.21) имеем при $m=\dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}+O(x^2),$$
$$\sqrt{1-x}=(1-x)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+O(x^2).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+O(x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}(1+O(x))=1.$$

Пример 19.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\ln(1+x)}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x+\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 19.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}$.

Р е ш е н и е: В этом примере также мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Подставляя вместо $(1+x)^m$ и $\ln(1+x)$ их представления по формуле Маклорена (19.21) и (19.22), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)-x(1+mx+O(x^2))}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\dfrac{1}{2}+m\right)x^2+O(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-m+O(x)\right)=-\frac{1}{2}-m.$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Пример 19.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\ln(1+x)}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-x+\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 19.3. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е: Заменив в формуле (19.18) x на x^2, получим

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\dots\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

Пример 19.5. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}$.

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot ... \cdot(m-k+1)}{k!}\, x^k, \qquad (19.21)$$

Р е ш е н и е: Вынесем 4 из-под корня в знаменателе, затем заменим в формуле для биномиального ряда (19.21) x на $\frac{x^2}{4}$ и, положив $m = -\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{2^2\cdot 2!\cdot 4^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^6}{2^3\cdot 3!\cdot 4^3} + \ldots\right) =$$

Пример 19.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Р е ш е н и е: Непосредственная подстановка $x = 0$ показывает, что данный предел является пределом типа $\frac{0}{0}$. Заменив e^x и $\sin x$ их представлениями по формуле Маклорена (19.18) и (19.19) с точностью до величин $O(x^3)$, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)) - 2 - 2x - x^2}{x - x + \frac{x^3}{3!} + O(x^5)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + O(x^4)}{\frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + O(x)}{\frac{1}{6} + O(x^2)} = 2.$$

График дробно-рациональной функции.

$$y = \frac{x^3}{(x+2)^2}$$

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$$

$$\lim_{x \to -2-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -2+0} y = -\infty$$

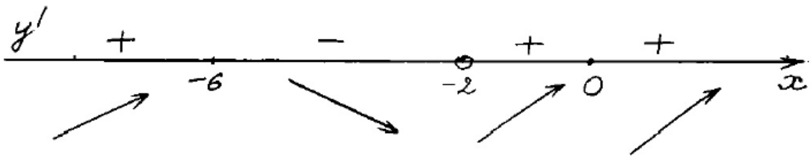
$x = -2$ - вертикальная асимптота

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x+2)^2} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^2 = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{(x+2)^2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2 - 4x}{(x+2)^2} = -4$$

$y = x - 4$ - наклонная асимптота

$$y' = \frac{3x^2(x+2)^2 - 2(x+2)x^3}{(x+2)^4} = \frac{3x^2(x+2) - 2x^3}{(x+2)^3} = \frac{x^3 + 6x^2}{(x+2)^3} = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}$$

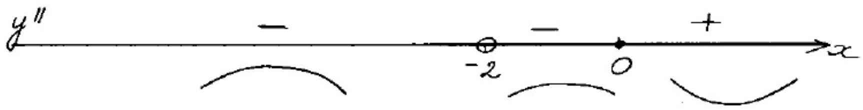


$x = -6$ - точка максимума

$$y_{\max} = y(-6) = \frac{(-6)^3}{(-4)^2} = -\frac{27}{2} = -13.5$$

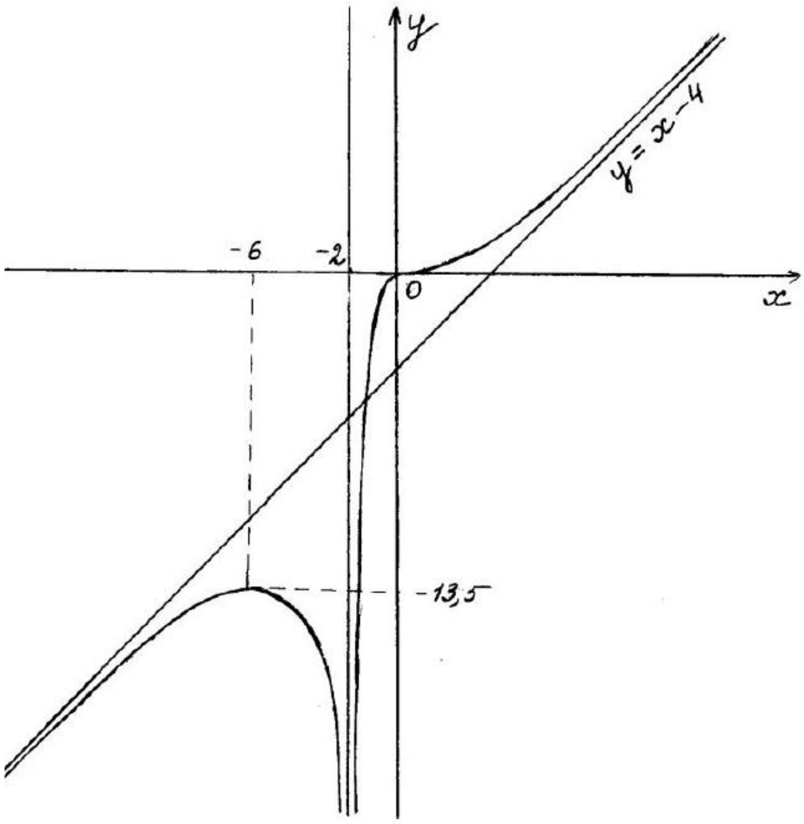
$x = 0$ - не является точкой экстремума

$$y'' = \frac{(3x^2 + 12x)(x+2)^3 - 3(x+2)^2(x^3 + 6x^2)}{(x+2)^6} = \frac{(3x^2 + 12x)(x+2) \;\; - 3(x^3 + 6x^2)}{(x+2)^4} = \frac{24x}{(x+2)^4}$$



$x = 0$ - точка перегиба, $y_{пер} = y(0) = 0$

x	$(-\infty;-6)$	-6	$(-6;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	0	$+$
y''	$-$		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y		$y_{max} = -13,5$		$x=-2$ в. а.		$y_{пер} = 0$	



Пример 2

График иррациональной функции.

$$y = \sqrt{x^2+4} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}}$$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$, $y > 0$ при всех x

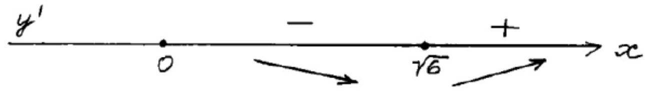
$y(-x) = y(x)$ для любого $x \Rightarrow$ $y(x)$ - четная фукция. Достаточно рассмотреть $x \in [0; +\infty)$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{10}{x\sqrt{x^2+4}} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} + \frac{10}{\sqrt{x^2+4}} \right) = 0$$

$y = x$ - наклонная асимптота

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{10x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x(x^2+4) - 10x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x^3 - 6x}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{x(x^2-6)}{(x^2+4)^{3/2}}$$



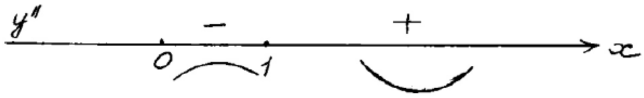
$x = 0$ - точка максимума

$y_{\max} = y(0) = 7$

$x = \sqrt{6}$ - точка минимума

$y_{\min} = y\left(\sqrt{6}\right) = 2\sqrt{10}$

$$y'' = \frac{(3x^2-6)(x^2+4)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2+4)^{1/2} \cdot 2x(x^3-6x)}{(x^2+4)^3} = \frac{(3x^2-6)(x^2+4) - 3x(x^3-6x)}{(x^2+4)^{3/2}} = \frac{24(x^2-1)}{(x^2+4)^{3/2}}$$



$x = 1$ - точка перегиба, $y_{пер} = y(1) = 3\sqrt{5}$

x	0	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6};+\infty)$
y'	0	$-$		$-$	0	$+$
y''		$-$	0	$+$		$+$
y	$y_{max}=$ $=7$		$y_{пер.}=$ $=3\sqrt{5}$		$y_{min}=$ $=2\sqrt{10}$	

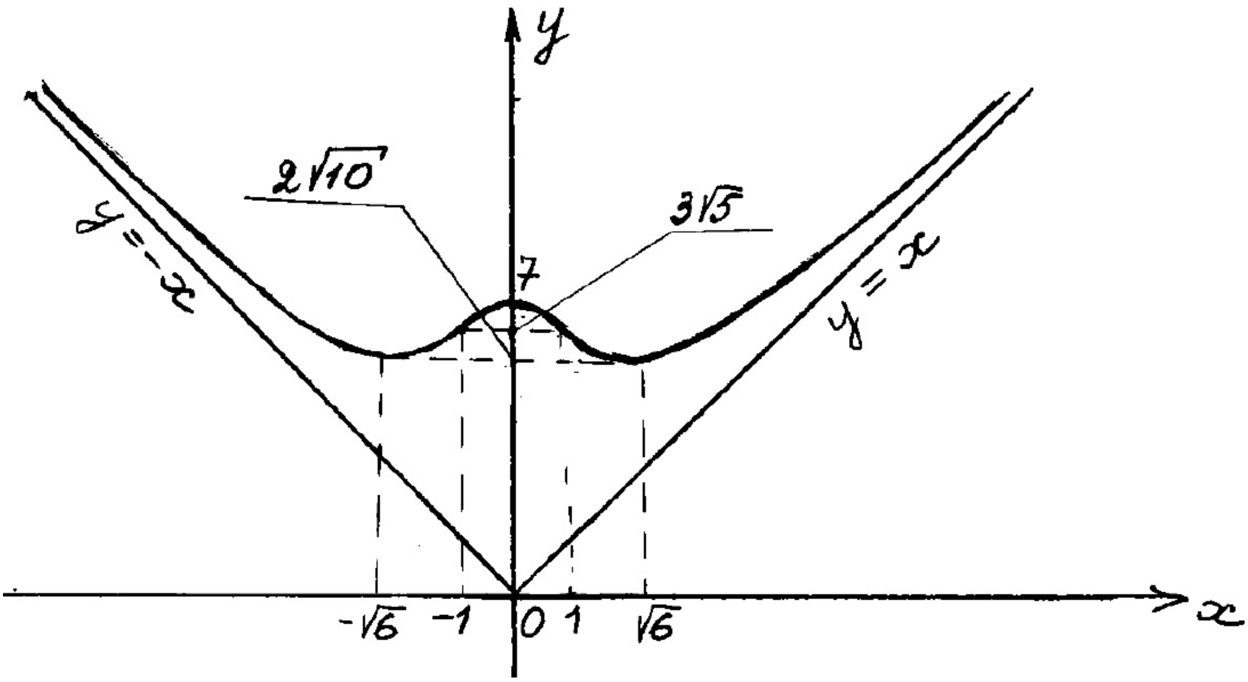


График функции общего вида.

$$y = x^2 \ln x$$

$D(y) = (0;+\infty)$

$y<0$, если $x \in (0;1)$, $y=0$, если $x=1$, $y>0$, если $x>1$

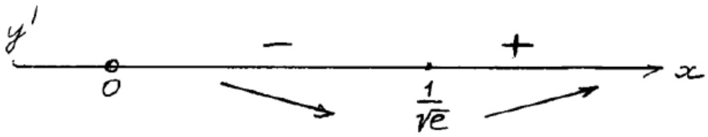
$$\lim_{x\to 0+0} y = \lim_{x\to 0+0}(x^2\ln x) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0+0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) = \lim_{x\to 0+0}\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$$

$(0;0)$ - граничная точка графика функции.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}(x\ln x) = \infty \Rightarrow$ асимптот нет

$y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0$, если $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

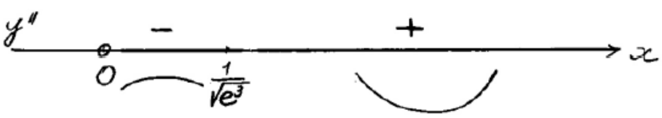


$x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ - точка минимума, $y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$

$\lim\limits_{x\to 0+0} y' = \lim\limits_{x\to 0+0}\left(\frac{2\ln x + 1}{\frac{1}{x}}\right) = 0 \Rightarrow$ график касается оси x в точке $(0;0)$.

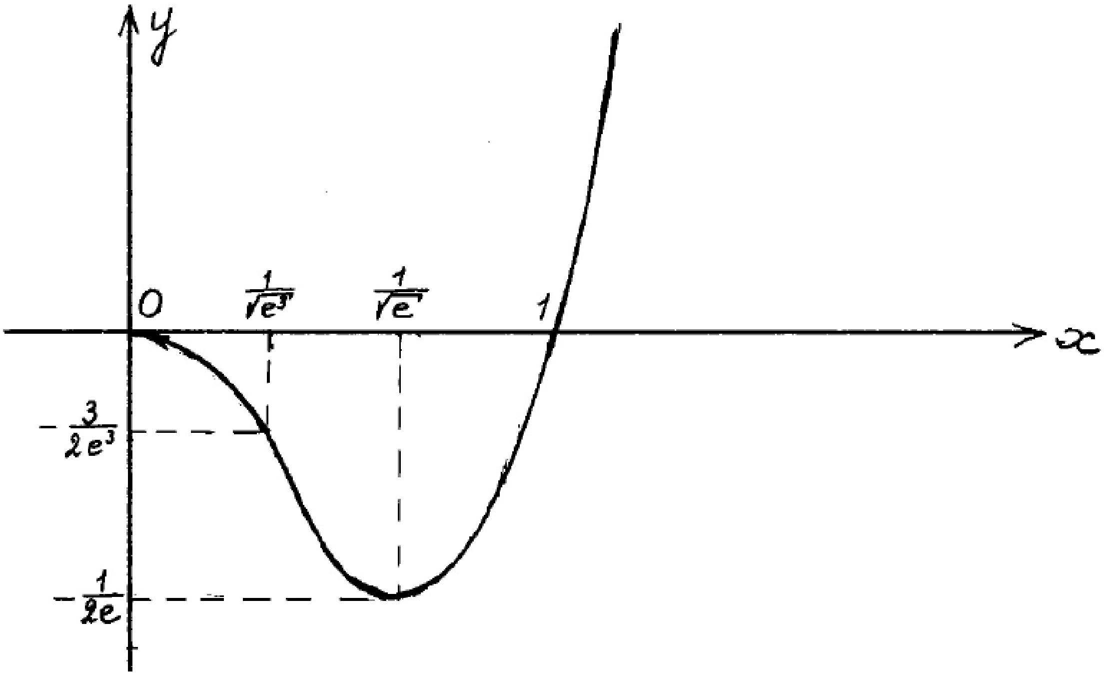
$y'' = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$

$y'' = 0$, если $x = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$



$x = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ - точка перегиба, $y_{пер} = y\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$

x	$\left(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$
y'	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$		$+$
y		$y_{пер.} = -3/2e^3$		$y_{min} = -1/2e$	



Пример 22.6. *Исследовать функцию* $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ *и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y) = (-\infty; -2) \bigcup (-2; 2) \bigcup (2; +\infty)$.
- Функция нечётная, т.к. $f(-x) = -f(x)$. Непериодическая.
- Точка пересечения с осями $x = 0,\ y = 0$.
- Точки разрыва : $x = -2$ и $x = 2$, прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами. При этом $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \pm\infty$, и $\lim\limits_{x\to -2\pm 0} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \pm\infty$.

  Наклонные асимптоты. Если поделить x^3 на $x^2 - 4$, получим $y = x - \dfrac{4x}{x^2-4}$. Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$, прямая, определяемая уравнением $y = x$, является наклонной асимптотой.
- Найдем производную

$$y' = f'(x) = (\frac{x^3}{x^2-4})' = \frac{(x^2-4)3x^2 - x^3 2x}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

- Критические точки функции: $x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{3},\ x = \pm 2$. Они разбивают область определения на интервалы :

  $(-\infty < x < -2\sqrt{3})$; $(-2\sqrt{3} < x < -2)$; $(-2 < x < 0)$;
  $(0 < x < 2)$; $(2 < x < 2\sqrt{3})$; $(2\sqrt{3} < x < +\infty)$.

  На интервале $-\infty < x < -2\sqrt{3}$ производная больше нуля – функция возрастает.

  На интервале $-2\sqrt{3} < x < -2$ производная меньше нуля – функция убывает.

  На интервале $-2 < x < 0$ производная меньше нуля – функция убывает.

При определении интервалов монотонности при $x > 0$ воспользуемся нечётностью функции. На интервалах $(0; 2)$ и $(2; 2\sqrt{3})$ функция убывает, на $(2\sqrt{3}; +\infty)$ – возрастает. Поведение функции в окрестности точек $x \pm 2$ исследовано ранее.

При переходе точки $x = 0$ производная $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.

При переходе точки $x = 2\sqrt{3}$ знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, эта точка является точкой минимума.

В силу нечётности функции точка $x = -2\sqrt{3}$ является точкой максимума.

- Найдем вторую производную: $y'' = f''(x) = \left(\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}\right)' =$

$$= \frac{(x^2-4)^2(4x^3-24x)-(x^4-12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x^5-24x^3-16x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

$f''(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$ и не существует в точках $x = \pm 2$.

На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(0; 2)$ вторая производная $f''(x) < 0$ – график функции выпуклый.

При переходе точки $x = 0$ вторая производная меняет знак, следовательно, $x = 0$ является точкой перегиба

На основании проведённых исследований построим таблицы и график функции (рис. 126).

x	$-\infty; -2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}; -2$	-2	-2;0
y'	> 0	0	< 0	$-\infty$	< 0
y	$\nearrow$	$-3\sqrt{3}$ max	$\searrow$	точка разрыва	$\searrow$

0	0;2	2	$2; 2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}; +\infty$
0	< 0	$-\infty$	< 0	0	> 0
экстремума нет	$\searrow$	точка разрыва	$\searrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\nearrow$

x	$-\infty; -2$	-2	-2;0	0	0;2	2	$2; +\infty$
y”	< 0	$\mp + \infty$	> 0	0	< 0	$\mp + \infty$	> 0
график y=f(x)	выпук.	точка разрыва	вогн.	точка перегиба	выпук.	точка разрыва	вогн.

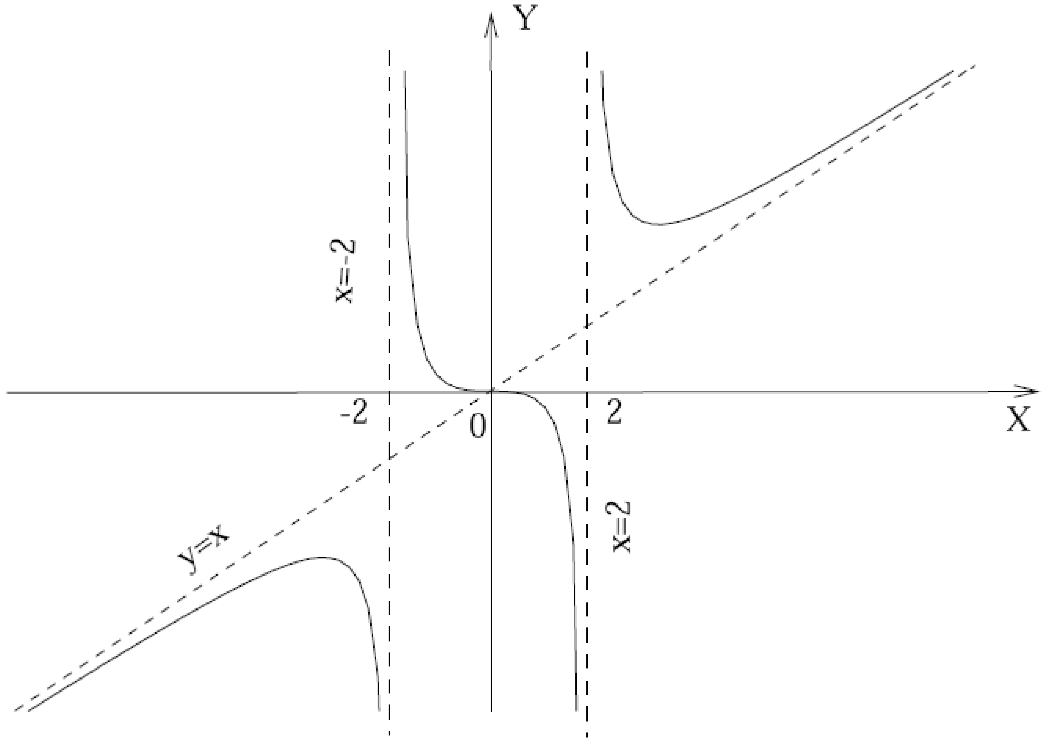


Рис. 126. *График функции* $y = x^3/(x^2 - 4)$

Пример 23.1. *Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$
- Функция общего вида, т.е. ни чётная, ни нечётная.
- Точки пересечения с осью $Oy: x = 0$, $y = 1$, с осью $Ox: y = 0$, $x = 1$.
- Точек разрыва нет, следовательно, вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты с использованием формул Маклорена:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1}) = -\lim_{x\to+\infty} (1 - \frac{1}{x^3})^{1/3} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{1-x^3} + x) = \lim_{x\to+\infty} (-x(1 - \frac{1}{x^3})^{1/3} + x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(-x + \frac{1}{3}\frac{x}{x^3} + x \cdot O\left(\frac{1}{x^6}\right) + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right) = 0.$$

Следовательно, существует наклонная асимптота $y = -x$

- Находим производную

$$y' = \frac{1}{3}\frac{(-3x^2)}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}.$$

Критические точки $x = 0$ и $x = 1$. Вторая производная

$$y'' = -\frac{\sqrt[3]{(1-x^3)^2 2x - \dfrac{x^2 2(-3x^2)}{3\sqrt[3]{1-x^3}}}}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}} =$$

$$= -\frac{(1-x^3)2x + 2x^4}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}} = -\frac{2x}{\sqrt[3]{(1-x^3)^5}}$$

имеет те же самые критические точки.

- Составим общую таблицу результатов исследования функции 1-ой и 2-ой производной.

x	$-\infty;0$	0	$0;1$	1	$1;+\infty$
y'	<0	0	<0	$-\infty$	<0
y''	>0	0	<0	$\pm+\infty$	>0
y	$\searrow$ $\cup$	Экстремума нет Точка перегиба $y=1$	$\searrow$ $\cap$	Экстремума нет Точка перегиба $y=0$	$\searrow$ $\cup$

- На основании проведённых исследований строим график функции 132.

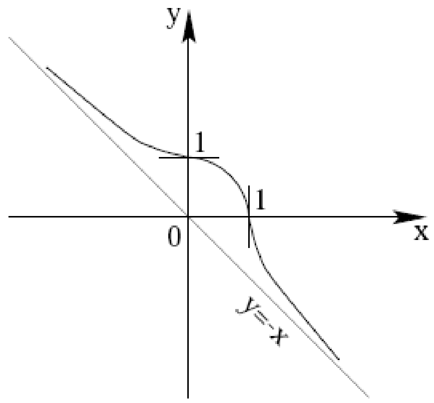


Рис. 132. *График функции* $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

Пример 23.2. *Исследовать функцию* $\dfrac{1-x^3}{x^2}$ *и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.
- Функция общего вида.
- Пересечение с осью $Oy: x=0, y=+\infty$, с осью $Ox: y=0, x=1$.
- Точка разрыва $x=0$, следовательно, существует вертикальная асимптота $x=0$.
- Из следующего представления функции $y=\dfrac{1}{x^2}-x \Rightarrow y=-x$ является наклонной асимптотой.
-
$$y'=\left(\frac{1-x^3}{x^2}\right)'=\left(\frac{1}{x^2}-x\right)'=-1-\frac{2}{x^3};\quad y''=\frac{6}{x^4}.$$

- Критические точки по первой производной $x = -\sqrt[3]{2}$ и $x = 0$, по второй производной $x = 0$.
- Составляем общую таблицу результатов исследования функции по производным:

x	$-\infty; -\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}$	$-\sqrt[3]{2}; 0$	0	$0; +\infty$
y'	< 0	0	> 0	$\pm + \infty$	< 0
y''	> 0	> 0	> 0	$+\infty$	> 0
y	$\searrow$ $\cup$	min $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$ $\cup$	Точка разрыва $+\infty$	$\searrow$ $\cup$

- На основании проведённых исследований строим график функции (рис. 133)

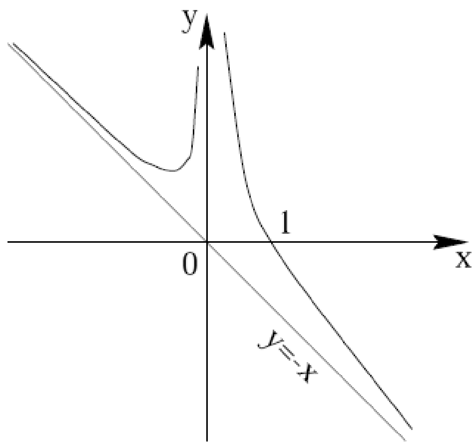


Рис. 133. *График функции* $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

Пример 23.3. *Исследовать функцию* $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ *и построить её график.*

Р е ш е н и е:

- Область определения функции $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечётная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Точка пересечения с осями только начало координат $(0;0)$.
- Вертикальных асимптот нет.
- Наклонные асимптоты определим с помощью формул Маклорена

$$y = x^{2/3}(1+\frac{1}{x})^{2/3} - x^{2/3}(1-\frac{1}{x})^{2/3} = x^{2/3}\left(1+\frac{2}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)-\right.$$

$$\left.-1+\frac{2}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + O\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right) \Rightarrow \pm 0 \text{ при } x \to \pm\infty.$$

Следовательно, существует горизонтальная асимптота $y = 0$, к которой график функции приближается при $x \to +\infty$ сверху, а при $x \to -\infty$ снизу.

-

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

Поскольку $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x+1} \neq 0$, критические точки $x = -1$ и $x = 1$.

-

$$y'' = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) = \frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}.$$

Числитель равен нулю при $x = 0$. Таким образом, критические точки по 2-ой производной $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

- Составляем общую таблицу исследования функции по производным:

x	$-\infty;-1$	-1	$-1;0$	0	$0;1$	1	$1;+\infty$
y'	<0	$\pm+\infty$	>0	$\frac{4}{3}$	>0	$\pm+\infty$	<0
y''	<0	$\pm+\infty$	<0	0	>0	$+\infty$	>0
y	$\searrow$ $\cap$	min $-\sqrt[3]{4}$ Перегиба нет	$\nearrow$ $\cap$	Наклон $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$ Точка перегиба $y=0$	$\nearrow$ $\cup$	max $\sqrt[3]{4}$ Перегиба нет	$\searrow$ $\cup$

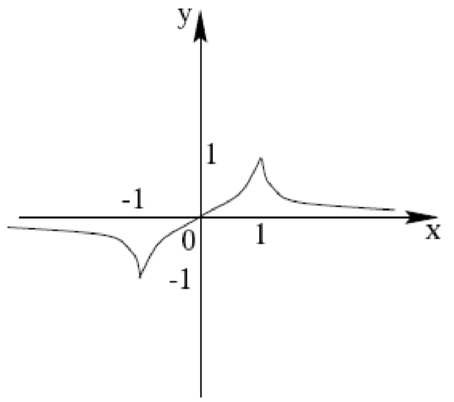


Рис. 134. *График функции* $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Пример 23.4. *Найти наибольшее M и наименьшее значения функции $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ на отрезках* $[-1;1]$, $[-2;0]$, $[-2;2]$,

Р е ш е н и е:

- В интервале $(-1;1)$ экстремумов заданная функция не имеет, следовательно, она достигает своего наименьшего и наибольшего значения в граничных точках $y(-1)=-\sqrt[3]{4}=m$, $y(+1)=\sqrt[3]{4}=M$.
- В интервале $(-2;0)$ функция достигает минимума в точке $x=-1$. Значение функции в граничных точках равны $y(-2)=1-\sqrt[3]{9}$ и $y(0)=0$. Следовательно, на отрезке $[-2;0]$ наименьшее значение достигается в точке минимума функции $m=y(-1)=-\sqrt[3]{4}$, наибольшее на границе $M=y(0)=0$.
- В интервале $(-2;2)$ функция достигает максимума и минимума $y_{max}=y(1)=\sqrt[4]{3}$, $y_{min}=y(-1)=-\sqrt[3]{4}$. Из сравнения этих значений функции $y(-2)=1-\sqrt[3]{9}$; $y(2)=\sqrt[3]{9}-1$. Находим $m=y_{min}=y(-1)=-\sqrt[3]{4}$, $M=y_{max}=y(1)=\sqrt[3]{4}$

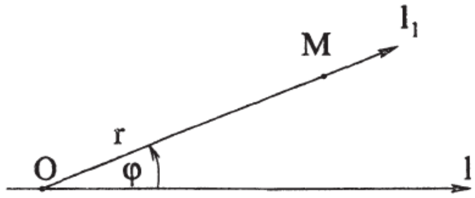
Полярные координаты.

Положение точки на плоскости можно определить с помощью полярной системы координат.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой ***полюсом***, и выходящего из этой точки луча l, называемого ***полярной осью***.

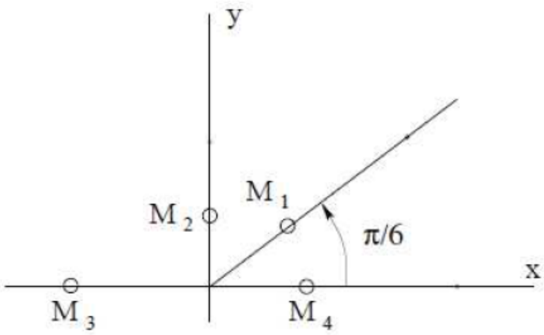
Положение точки M на плоскости в полярной системе координат задается полярным углом φ и полярным радиусом r, называемыми ***полярными координатами*** точки M: $M(\varphi;r)$.

Пусть на плоскости задана числовая ось l. Назовем ее, а ее начало - точку
Проведем через точку M и полюс O ось l_1, начало которой совпадает с O, а положительное направление от O к M.



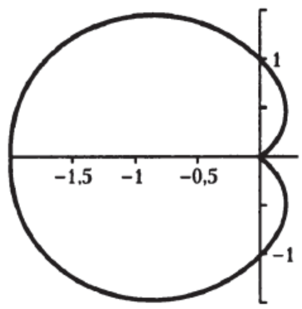
Полярный угол φ - это угол между полярной осью l и осью l_1, отсчитываемый со знаком "+" против часовой стрелки и со знаком "-" по часовой стрелке.

Полярный радиус r - это расстояние от O до точки M по оси l_1 $(r \geq 0)$.
Если значение полярного угла φ ограничить промежутком $0 \leq \varphi < 2\pi$, то между точками плоскости и упорядоченными парами полярных координат $(\varphi;r)$ будет существовать взаимно-однозначное соответствие.



Пример. Построить в полярной системе координат точки: $M_1\left(\frac{\pi}{6};3\right)$, $M_2\left(\frac{\pi}{2};2\right)$, $M_3(\pi;4)$, $M_4(0;3)$.

Пример. Построить график функции, заданной в полярных координатах $r = 1 - \cos\varphi$.



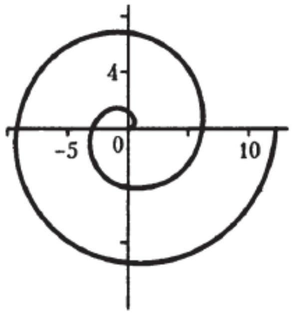
Кривая, описываемая этим уравнением в полярных координатах, называется ***кардиоидой.***

Составив таблицу для некоторых значений полярного угла φ и соответствующих им значений r, построим получившуюся кривую.

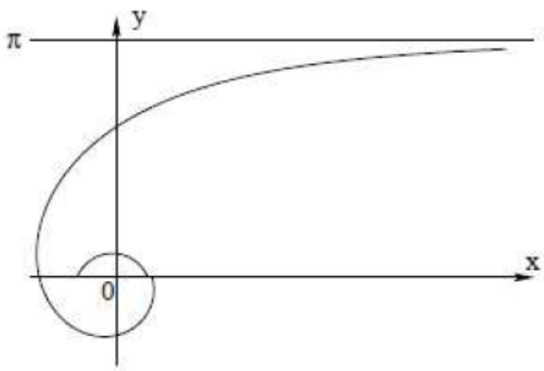
φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
r	0	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	2	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0

Примеры графиков функций, заданных в полярных координатах:

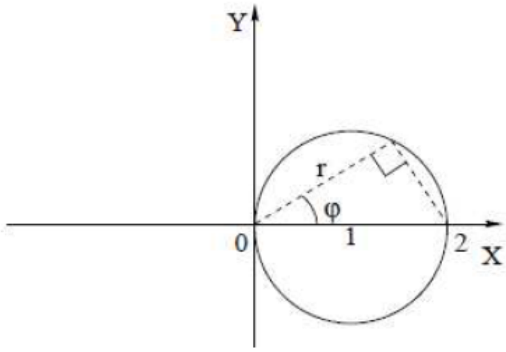
1) Спираль Архимеда: $r = \varphi$



2) Гиперболическая спираль: $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$



3) Окружность: $r = 2\cos\varphi$



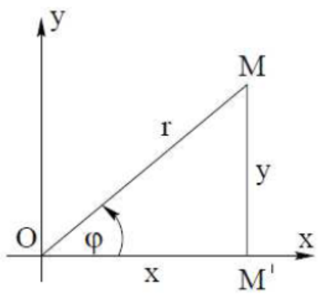
Выведем формулы, связывающие декартовы координаты с полярными.

Расположим полярную ось l совпадающую с осью Ox, а полюс O - с началом координат O.

Из треугольника OMM' находим:

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$, откуда

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$



Приведенные формулы дают зависимость декартовых координат $(x; y)$ от полярных $(\varphi; r)$ и наоборот.

В последней формуле из двух значений угла φ, соответствующих найденной величине $tg\varphi$, выбирается то $(0 \le \varphi < 2\pi)$, при котором удовлетворяется первая система.

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y > 0, \;\; x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y < 0, \;\; x = 0. \end{cases}$$

Пример 2.6. *Найти полярные координаты точки M с декартовыми координатами $x = 2$, $y = -2$.*

Р е ш е н и е: По формулам (2.10) находим : $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -1$. По формуле (2.11) $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $M\left(2\sqrt{2}; -\dfrac{\pi}{4}\right)$.