Лекция 10. Числовые ряды. Определения и свойства

Основные определения, простейшие свойства числовых рядов, необходимый признак сходимости ряда.

10.1. Основные определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. *Числовым рядом называется сумма членов бесконечной числовой последовательности:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots\ = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{10.1}$$

Числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда. Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n как функция его номера n: $u_n = f(n)$.

Приведем несколько примеров рядов:

1) $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} + \dots,\qquad u_n = \dfrac{1}{n};$
2) $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots,\qquad u_n = 2 \cdot 3^{n-1};$
3) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots,\qquad u_n = (-1)^{n-1};$
4) $\cos\dfrac{\pi}{1} + \cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{3} + \dots + \cos\dfrac{\pi}{n} + \dots,\qquad u_n = \cos\dfrac{\pi}{n}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. *Сумма S_n первых n членов ряда называется n-й частичной суммой ряда:*

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{10.2}$$

Иногда, исследуя частичную сумму ряда, можно сделать вывод о характере поведения самого ряда.

ПРИМЕР 10.1. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Составим последовательность частичных сумм S_n этого ряда. Для этого прежде всего заметим, что общий член ряда можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2};$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3};$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}.$$

Подобным же образом найдем, что

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отсюда следует, что предел последовательности частичных сумм этого ряда равен единице:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 1.$$

Пример 10.2. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$2 + 6 + 18 + \dots + 2\cdot 3^{n-1} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Найдем последовательность его частичных сумм:

$$S_1 = 2, S_2 = 2 + 6 = 8,$$

$$S_3 = 2 + 6 + 18 = 26, \dots,$$

$$S_n = 2 + 6 + 18 + \dots + 2\cdot 3^{n-1}.$$

Эти частичные суммы можно переписать следующим образом:

$$S_1 = 2 = 3 - 1, S_2 = 8 = 3^2 - 1, S_3 = 26 = 3^3 - 1, \dots, S_n = 3^n - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(3^n - 1) = +\infty.$$

Пример 10.3. *Исследовать частичную сумму ряда:*

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Последовательность частичных сумм имеет вид

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots .$$

В этом примере последовательность частичных сумм не стремится ни к какому пределу.

Таким образом, для некоторых рядов последовательность частичных сумм стремится к определённому пределу, для других же рядов такой предел не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. *Ряд называется сходящимся, если существует конечный предел S последовательности его частичных сумм S_n при неограниченном возрастании номера n, т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S. \tag{10.3}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. *Предел S последовательности частичных сумм сходящегося ряда называется суммой ряда.*

Если S является суммой сходящегося ряда $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$, то пишут:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. \tag{10.4}$$

Если последовательность частичных сумм ряда не имеет предела, то ряд называется расходящимся. Расходящийся ряд суммы не имеет.

Одним из простейших, но очень часто встречающихся рядов является геометрическая прогрессия (лекция 6):

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + \dots; \tag{10.5}$$

b_1 называется первым членом прогрессии, а множитель q – знаменателем прогрессии.

Сумма n первых членов (n-я частичная сумма) прогрессии, как известно, может быть вычислена при $q \neq 1$ по формуле

$$S_n = \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - b_1q^n}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1}{1-q} - \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия является сходящимся рядом, сумма которого $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = +\infty.$$

Следовательно, в этом случае ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (10.5) принимает вид

$$b_1 + b_1 + b_1 + \dots + b_1 + \dots .$$

Для него $S_n = nb_1$ и при $b_1 \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, т.е. ряд расходится.

4) Если $q = -1$, то ряд (10.5) принимает вид

$$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \dots .$$

В этом случае $S_n = 0$ при n чётном и $S_n = b_1$ при n нечётном. Следовательно, при $b_1 \neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ не существует и ряд расходится. Итак, геометрическая прогрессия является сходящимся рядом при $|q| < 1$ и расходящимся при $|q| \geqslant 1$.

10.2. Простейшие свойства числовых рядов

Рассмотрим несколько свойств числовых рядов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 10.1. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{10.6}$$

сходится и имеет сумму S, то ряд

$$au_1 + au_2 + au_3 + \dots + au_n + \dots, \tag{10.7}$$

где a – заданное число, также сходится и его сумма равна aS.

Доказательство. Пусть S_n есть n-я частичная сумма ряда (10.6), а σ_n есть n-я частичная сумма ряда (10.7). Тогда

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + au_3 + \dots + au_n = a(u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = aS_n.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} aS_n = a \lim_{n\to+\infty} S_n = aS.$$

Таким образом, ряд (10.7) сходится и имеет сумму aS.

Теорема 10.2. *Если ряды*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \tag{10.8}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \tag{10.9}$$

сходятся и имеют соответственно сумму S и $\bar{S}$, то ряд

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) + \dots, \tag{10.10}$$

получающийся почленным сложением данных рядов, также сходится и имеет сумму $S + \bar{S}$.

Доказательство. Обозначим n-е частичные суммы рядов (10.8), (10.9) и (10.10) соответственно через S_n, $\bar{S}_n$ и σ_n. Имеем:

$$\sigma_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \dots + (u_n + v_n) = S_n + \bar{S}_n.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n + \bar{S}_n) = \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} \bar{S}_n = S + \bar{S}.$$

Итак, ряд (10.10) сходится. Ряд (10.10) называется суммой рядов (10.8) и (10.9).

Замечание 10.1. *Аналогично можно доказать, что сходится ряд*

$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \dots + (u_n - v_n) + \dots \tag{10.11}$$

и его сумма равна $S - \bar{S}$. Ряд (10.11) называется разностью рядов (10.8) и (10.9).

Рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{k-1} + u_k + u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots \tag{10.12}$$

и

$$u_{k+1} + \dots + u_{n-1} + u_n + \dots. \tag{10.13}$$

Теорема 10.3. *Если сходится данный ряд (10.12), то сходится и ряд (10.13), полученный из ряда (10.12) отбрасыванием конечного числа k его первых членов. Обратно, если сходится ряд (10.13), то сходится и данный ряд (10.12).*

Доказательство. Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (10.12), через S_k – сумму k отброшенных членов ($k < n$) и через σ_{n-k} – сумму $n - k$ первых членов ряда (10.13):

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k + u_{k+1} + \dots + u_n,$$

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k, \sigma_{n-k} = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_n.$$

Следовательно,

$$S_n = S_k + \sigma_{n-k}, \tag{10.14}$$

причём S_k – некоторое число, не зависящее от n.

1. Пусть ряд (10.12) сходится и имеет сумму S, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$. Тогда из равенства (10.14) следует:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_k) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_k = S - S_k.$$

Итак, частичные суммы σ_{n-k} ряда (10.13) при $n \to +\infty$ имеют предел, т.е. ряд (10.13) сходится.

2. Пусть ряд (10.13) сходится и имеет сумму σ, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = \sigma$. Из (10.14) следует:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_k + \sigma_{n-k}) = S_k + \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n-k} = S_k + \sigma,$$

т.е. ряд (10.12) сходится.

Теорему 10.3 можно сформулировать также следующим образом.

На сходимость ряда не влияет отбрасывание любого конечного числа его первых членов.

10.3. Необходимый признак сходимости ряда

Приведем необходимое условие сходимости ряда.

Теорема 10.4. *Если ряд $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\ldots$ сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n.*

Доказательство. Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots,$$

имеющий сумму S. Рассмотрим его частичные суммы

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

и

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}.$$

Отсюда $u_n = S_n - S_{n-1}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$, так как при $n \to +\infty$ и $n-1 \to +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$. Итак,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0. \tag{10.15}$$

Теорема 10.5. *(достаточный признак расходимости ряда). Если общий член ряда не стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера n, то ряд расходится.*

Действительно, если бы ряд сходился, то по предыдущей теореме его общий член обязан был бы стремиться к нулю, что противоречит условию.

Пример 10.4. *Исследовать на сходимость ряд.*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} + \dots$$

Р е ш е н и е: Ряд расходится, так как его общий член $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ не стремится к нулю при $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1.$$

Условие $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ является необходимым для сходимости ряда, но не достаточным. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, для которых $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Примером может служить ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots. \tag{10.16}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Однако легко показать, что ряд расходится. Для этого рассмотрим частичную сумму ряда

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{1}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} > \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots$, то очевидно, что

$$S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$S_n > n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, т.е. $S_n > \sqrt{n}$. Отсюда непосредственно следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, и, следовательно, ряд расходится.

Практическое занятие 10. Числовые ряды. Основные понятия

Числовые ряды являются одним из важнейших разделов математического анализа. Приступая к практическому изучению рядов, прежде всего следует усвоить понятия сходящегося и расходящегося числового ряда, а затем перейти к изучению признаков (условий) сходимости рядов. Следует понимать и правильно применять необходимые и достаточные условия сходимости. Равенство $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, где u_n – общий член ряда, является лишь необходимым условием для сходимости ряда. Если это условие не выполняется, то исследуемый ряд расходится, а если это условие выполняется, то окончательно ответить на вопрос о сходимости числового ряда можно только после исследования его с помощью одного из достаточных признаков сходимости.

Пример 10.1. *Дан общий член ряда* $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$. *Записать первые четыре члена ряда.*

Р е ш е н и е: В числителе записан общий член геометрической прогрессии, знаменатель которой q=2. В знаменателе мы имеем дело с факториалом n! произвольного целого числа n$\geqslant$0, который определяется формулами: 0!=1, 1!=1, 2!=1·2, 3!=1·2·3, n!=1·2·3·...·n. Следовательно, ряд можно записать в виде:

$$\frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{n!} + \cdots .$$

Пример 10.2. *Найти общий член ряда*

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: Как и в случае с общим членом последовательности, здесь необходимо установить закономерность изменения каждого члена ряда от его номера n. В данном случае изменяются только знаменатели, которые образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7,... Известно, что n-й член арифметической прогрессии можно найти по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$. Здесь $a_1 = 1, d = 2$, поэтому $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

Пример 10.3. *Найти общий член ряда*

$$1 + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: В числителе сомножители образуют последовательность с общим членом n^2. В знаменателе каждый член ряда представляет собой произведение нескольких первых членов арифметической прогрессии ($a_1 = 1, d = 3$). В соответствии с формулой общего члена арифметической прогрессии (см. предыдущий пример) $a_n = 3n - 2$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot \cdots \cdot n^2}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}$.

Пример 10.4. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 34} + \cdots + \frac{1}{(11n-10) \cdot (11n+1)} + \cdots .$$

Р е ш е н и е: Разложим общий член ряда на сумму двух дробей по методу неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{(11n-10) \cdot (11n+1)} = \frac{A^{\backslash 11n+1}}{11n-10} + \frac{B^{\backslash 11n-10}}{11n+1} =$$

$$= \frac{A(11n+1) + B(11n-10)}{(11n-10) \cdot (11n+1)}.$$

Две дроби равны, если равны их числители и знаменатели, следовательно:

$$1 = A(11n+1) + B(11n-10).$$

$$\begin{array}{l}\text{Полагая n=0, имеем}\\ \text{Полагая n=1, имеем}\end{array}\begin{cases} A - 10B = 1. \\ 12A + B = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений относительно неизвестных A и B, найдем $A = \dfrac{1}{11}$, $B = -\dfrac{1}{11}$. Общий член ряда можно переписать в виде:

$$u_n = \frac{1}{(11n-10) \cdot (11n+1)} = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right).$$

Запишем несколько первых членов ряда:

$$u_1 = \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12}\right), u_2 = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{23}\right), u_3 = \frac{1}{11}\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{34}\right), \dots .$$

Следовательно:

$$S_n = \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{23}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{34}\right) + \cdots$$

$$+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right) =$$

$$\frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{34} + \dots + \frac{1}{11n-10} - \frac{1}{11n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{11n+1}\right).$$

Итак, $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{11}\left(1 - \frac{1}{11n+1}\right) = \frac{1}{11}$.

Ответ: $S = \frac{1}{11}$.

Пример 10.5. *Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится.*

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1 = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{2}$, и поэтому сходится. Найдем сумму ряда:

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Пример 10.6. *Исследовать сходимость ряда.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+1}{4n-1}.$$

Р е ш е н и е: Проверим необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+1}{4n-1} = \frac{5}{4} \neq 0.$$

Ответ: Данный ряд расходится, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости.

Самостоятельная работа

Пример 10.7. *Найти общий член ряда*

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots .$$

Пример 10.8. *Найти общий член ряда*

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \cdots .$$

Пример 10.9. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots .$$

Пример 10.10. *Найти сумму ряда*

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots .$$

Пример 10.11. *Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Пример 10.12. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n-1}.$$

Лекция 11. Знакопостоянные ряды

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Как мы уже знаем, суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм: $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Однако нахождение этого предела во многих случаях связано с большими трудностями. В таких случаях сумму ряда находят приближённо, заменяя её частичной суммой S_n с достаточно большим номером n. Но для этого надо быть уверенным, что данный ряд сходится. Сходимость или расходимость ряда во многих случаях удаётся установить с помощью так называемых достаточных признаков. В этом пункте мы рассмотрим достаточные признаки сходимости и расходимости для рядов с положительными членами. Такие ряды называются знакоположительными.

Замечание 11.1. *Все полученные ниже выводы будут справедливы и для рядов с отрицательными членами, т.е. для знакоотрицательных рядов.*

Прежде всего заметим следующее. Так как в знакоположительном ряде все члены положительны,то его частичные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1+u_2$, $S_3 = u_1+u_2+u_3, \ldots, S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ возрастают с увеличением номера суммы n. Таким образом, частичные суммы ряда образуют возрастающую числовую последовательность

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n < \ldots.$$

Здесь возможны два случая.

1. Последовательность частичных сумм неограниченна. В этом случае $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ и, следовательно, ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т.е. $S_n < C$ при любом n. В этом случае последовательность частичных сумм имеет предел и, следовательно, ряд сходится.

Таким образом, при доказательстве того, что тот или иной знакоположительный ряд сходится, достаточно установить только ограниченность последовательности его частичных сумм.

Теорема 11.1. *(Первый признак сравнения.) Даны два знакоположительных ряда:*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots, \qquad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots . \qquad (V)$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго ряда:

$$u_1 \leqslant v_1, u_2 \leqslant v_2, u_3 \leqslant v_3, \dots, u_n \leqslant v_n, \dots, \qquad (11.1)$$

и второй ряд сходится. В таком случае первый ряд также сходится, и его сумма не превосходит суммы второго ряда (заключение теоремы остается в силе, если некоторые члены ряда (U) равны нулю).

Доказательство. Обозначим через S_n и σ_n соответственно n–е частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \quad \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (11.1) следует, что $S_n \leqslant \sigma_n$. Так как ряд (V) сходится, то существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = \sigma$. При этом, поскольку члены ряда положительны, очевидно, что $\sigma_n < \sigma$, а следовательно, и $S_n < \sigma$. Таким образом, частичные суммы ряда (U) ограничены и, следовательно, ряд (U) сходится, причем его сумма не превосходит суммы ряда (V), как это следует из неравенства $S_n < \sigma$.

Теорема 11.2. *(Второй признак сравнения.) Даны два знакоположительных ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots, \qquad (U)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots . \qquad (V)$$

Пусть члены первого ряда не меньше соответствующих членов второго ряда

$$u_1 \geqslant v_1, u_2 \geqslant v_2, u_3 \geqslant v_3, \dots, u_n \geqslant v_n, \dots, \qquad (11.2)$$

и второй ряд расходится. В таком случае первый ряд также расходится.

Доказательство. Обозначим снова через S_n и σ_n соответственно частичные суммы первого и второго рядов:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n, \sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

Из неравенств (11.2) следует, что $S_n \geqslant \sigma_n$. Так как ряд (V) расходится и его частичные суммы возрастают, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n = +\infty$. В таком случае и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ и, следовательно, ряд (U) расходится.

При исследовании рядов необходимо иметь для сравнения ряды, относительно которых достоверно известно, сходятся они или расходятся.

Геометрическая прогрессия представляет собой ряд, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geqslant 1$.

Во втором семестре в разделе интегральных исчислений будет показано, что ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \tag{11.3}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$. При $p = 1$ получается ряд

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \tag{11.4}$$

который называется гармоническим. Ряд (11.3) называется обобщенным гармоническим рядом.

Геометрическая прогрессия, гармонический и обобщенный гармонический ряды очень часто используются при исследовании рядов с помощью признаков сравнения в качестве эталонных рядов.

Пример 11.1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} + \dots. \tag{11.5}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots. \tag{11.6}$$

Ряд (11.6) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/2 < 1$ и, следовательно, сходится. Так как члены ряда (11.5) не превосходят соответствующих членов ряда (11.6), то по первому признаку сравнения ряд (11.5) также сходится.

Пример 11.2. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 3}} + \frac{1}{\sqrt{\ln 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}} + \dots. \tag{11.7}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots, \tag{11.8}$$

который расходится. Так как каждый член ряда (11.7) больше соответствующего члена ряда (11.8):

$$\ln n < n, \sqrt{\ln n} < \sqrt{n}, \frac{1}{\sqrt{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt{n}},$$

то в силу второго признака сравнения ряд (11.7) также расходится.

Во многих примерах оказывается целесообразным использовать ещё один признак сравнения.

ТЕОРЕМА 11.3. *(Признак «подобия» рядов) Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = k$, *то оба исследуемых ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся, т.е. ведут себя при* $n \to +\infty$ *подобным образом. Такие ряды назовем «подобными».*

ПРИМЕР 11.3. *Исследовать на сходимость ряд:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots. \tag{11.9}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим вспомогательный ряд с n-ым членом $v_n = \dfrac{1}{n}$, о котором известно, что он расходится.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{2n-1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

На основании признака «подобия» оба ряда ведут себя одинаково и, следовательно, в данном случае расходятся, т.е. ряд (11.9) расходится.

Применение признаков сравнения при исследовании рядов часто бывает затруднительно из-за необходимости составлять вспомогательный ряд. Поэтому часто применяются другие достаточные признаки, которые позволяют по виду самого ряда судить о его сходимости или расходимости.

ТЕОРЕМА 11.4. *(Признак Даламбера [2]). Если для знакоположительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{11.10}$$

[2] Ж. Даламбер(1717—1783) – французский математик.

существует предел отношения последующего члена к предыдущему при неограниченном возрастании номера члена n, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho, \tag{11.11}$$

то при $\rho<1$ ряд сходится, а при $\rho>1$ ряд расходится.

Доказательство. а) Пусть $\rho<1$. Покажем, что ряд сходится. Действительно, так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то на основании определения предела последовательности для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех членов ряда, номер которых $n\geqslant N$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho<+\varepsilon,\ \text{ или } \rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon.$$

Полагая $\rho+\varepsilon=q$, получим $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<q$. Так как ρ по предположению меньше единицы, а ε произвольно мало, то ε можно выбрать настолько малым, чтобы $q=\rho+\varepsilon<1$. Таким образом, для $n\geqslant N$ имеем:

$$\frac{u_{N+1}}{u_N}<q,\frac{u_{N+2}}{u_{N+1}}<q,\frac{u_{N+3}}{u_{N+2}}<q,\ldots,$$

т.е.

$$u_{N+1}<u_Nq, u_{N+2}<u_{N+1}q<u_Nq^2, u_{N+3}<u_{N+2}q<u_Nq^3,\ldots.$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots, \tag{11.12}$$

$$u_N+u_Nq+u_Nq^2+u_Nq^3+\ldots. \tag{11.13}$$

Ряд (11.13) сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $|q|<1$. Так как члены ряда (11.12) не превосходят соответствующих членов ряда (11.13), то на основании первого признака сравнения ряд (11.12) также сходится.

Но ряд (11.12) получается из данного ряда (11.10) отбрасыванием конечного числа членов $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{N-1}$. Следовательно, по теореме 3 ряд (11.10) также сходится.

б) Пусть теперь $\rho>1$. Покажем, что ряд расходится. Действительно, в этом случае $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$. Отсюда следует, что начиная с достаточно больших значений $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, или $u_{n+1} > u_n$. Таким образом, члены ряда возрастают с увеличением номера члена n. Поэтому $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, т.е. выполнен достаточный признак расходимости ряда и, следовательно, ряд расходится.

Замечание 11.2. *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$, *то ряд также расходится, так как и в этом случае* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *для достаточно больших* n *и, следовательно,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Замечание 11.3. *Подчеркнём ещё раз, что, если расходимость ряда установлена с помощью признака Даламбера, то общий член ряда не стремится к нулю.*

Замечание 11.4. *При* $\rho = 1$ *признак Даламбера на вопрос о том, сходится или расходится ряд, ответа не даёт. Как показывают примеры, в этом случае может иметь место как сходимость, так и расходимость.*

Рассмотрим примеры исследования рядов на сходимость с помощью признака Даламбера.

Пример 11.4. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Находим

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2(n+1)-1}{3^{n+1}} : \frac{2n-1}{3^n}\right] = \lim_{n-to+\infty} \frac{3^n(2n+1)}{3^{n+1}(2n-1)} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{2+1/n}{2-1/n} = \frac{1}{3}.$$

Итак, $\rho = 1/3 < 1$ и, следовательно, данный ряд сходится.

Пример 11.5. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Находим

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4}\right] = \lim_{n-to+\infty} \frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} =$$

$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+1/n)^4} = 2.$$

Так как $\rho = 2 > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 11.6. *Исследовать на сходимость ряд с общим членом ряда* $u_n = \dfrac{a^n}{n^k}(a > 1, k > 1)$.

Р е ш е н и е: Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} : \frac{a^n}{n^k} \right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1} \cdot n^k}{a^n \cdot (n+1)^k} = a.$$

Так как по условию $a > 1$, можно сделать вывод о том, что ряд $u_n = \dfrac{a^n}{n^k}$ расходится, т.е. показательная функция возрастает быстрее степенной с ростом аргумента.

Рассмотрим теперь два примера рядов, для которых $\rho = 1$, и покажем, что один из этих рядов сходится, а другой расходится.

Пример 11.7. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

Р е ш е н и е: Находим по признаку Даламбера

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} : \frac{1}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

На основании признака Даламбера сделать заключение о сходимости или расходимости ряда мы не можем. Однако, как было указано ранее, обобщенный гармонический ряд при $\rho = \dfrac{1}{2} < 1$ расходится (11.3).

В некоторых случаях вопрос о сходимости или расходимости ряда можно исследовать с помощью так называемого «радикального» признака сходимости.

Теорема 11.5. *(Радикальный признак Коши [3].) Если для ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots$$

[3] О.Коши(1789–1857) — французский математик.

существует $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$*, то этот ряд сходится при* $q<1$ *и расходится при* $q>1$*. В случае, когда* $q=1$*, вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Пример 11.8. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Р е ш е н и е: Применим признак Коши.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд сходится.

Следует отметить, что для исследования сходимости знакоположительных рядов существует ещё один достаточный признак сходимости – интегральный признак Коши. Однако к его использованию мы сможем приступить только после изучения интегралов.

Практическое занятие 11. Знакопостоянные ряды

Пример 11.1. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=2}^{+\infty}u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\cdots+\frac{\ln n}{n}+\cdots .$$

Р е ш е н и е: В качестве достаточного признака сходимости используем признак сравнения. Для сравнения используем гармонический ряд с $v_n=\dfrac{1}{n}$. Каждый член ряда u_n больше соответствующего члена ряда v_n ($\dfrac{\ln n}{n}>\dfrac{1}{n}$). При $n\to+\infty$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится, следовательно, расходится и заданный ряд.

Пример 11.2. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}.$$

Р е ш е н и е: Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходиться как геометрическая прогрессия с $q = \frac{1}{2}$. Используя признак «подобия» рядов:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{4\cdot 2^n - 3}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{4\cdot 2^n - 3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4 - \frac{3}{2^n}} = \frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ – есть геометрическая сходящаяся последовательность с $q = \frac{1}{2}$, то и ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}$ также сходится.

Пример 11.3. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 - 3n}.$$

Р е ш е н и е: Сравним этот ряд с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, который, согласно (11.3), сходится. Используя признак «подобия», будем иметь

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n^2 - 3n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2 - 3n}$.

Пример 11.4. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Р е ш е н и е: Для сравнения выбираем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Опять используем признак «подобия».

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to\ 0} \frac{\sin m}{m} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 11.5. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}.$$

Р е ш е н и е: Для исследования сходимости используем признак Даламбера. Запишем $n+1$ член ряда

$$u_{n+1} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)(3(n+1)-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)(4(n+1)-3)} =$$

$$\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)\cdot(4n+1)} = u_n\frac{3n+2}{4n+1}.$$

Вычислим $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$. Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 11.6. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{e^n}.$$

Р е ш е н и е: Исследуем ряд по признаку Даламбера

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!/e^{n+1}}{n!/e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot e^n}{n!\cdot e^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{e} = +\infty > 1.$$

Следовательно, на основании признака Даламбера данный ряд расходится.

Пример 11.7. *Исследовать сходимость ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n.$$

Р е ш е н и е: Здесь удобно применить признак Коши.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд сходится.

Самостоятельная работа

Исследовать сходимость ряда.

Пример 11.8. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\ln n}$.

Пример 11.9. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{5^n+1}$.

Пример 11.10. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2\ln n}$.

Пример 11.11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

Пример 11.12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{10^n}{n!}$.

Пример 11.13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{3^{n/2}}$.

Пример 11.14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{2n}{3n+1}\right)^n$.

Лекция 12. Знакопеременные ряды

> Знакопеременные ряды, признак Лейбница, достаточный признак сходимости знакопеременных рядов, абсолютная и условная сходимость, остаток ряда и его оценка.

12.1. Знакопеременные ряды

До сих пор мы изучали только ряды, все члены которых были одного знака. Теперь мы перейдем к рассмотрению рядов, содержащих как положительные, так и отрицательные члены. Такие ряды называются знакопеременными.

В качестве примера знакопеременного ряда приведем ряд

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}-\dots+(-1)^{n(n-1)/2}\frac{1}{n^2}+\dots .$$

Изучение знакопеременных рядов мы начнём с частного случая – так называемых знакочередующихся рядов, т. е. рядов, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный, а за каждым отрицательным – положительный.

Обозначая через $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ абсолютные величины членов ряда и считая, что первый член положителен, запишем знакочередующийся ряд следующим образом:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \ . \qquad (12.1)$$

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости Лейбница[4].

12.2. Признак Лейбница

Теорема 12.1. *Если в знакочередующемся ряде (12.1) абсолютные величины членов убывают:*

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_n > \ldots$$

и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *то ряд сходится, причём его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму чётного числа членов ряда

$$S_{2m} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2m-1} - u_{2m}.$$

Сгруппируем члены попарно:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}).$$

Так как по условию абсолютные величины членов ряда убывают, то все разности в скобках положительны и, следовательно, сумма S_{2m} положительна и возрастает при увеличении m.

Запишем теперь S_{2m}, группируя члены иным образом:

$$u_1 - [(u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \cdots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) + u_{2m}].$$

Сумма в квадратной скобке также является положительной. Поэтому $S_{2m} < u_1$ для любого значения m. Таким образом, последовательность чётных частичных сумм S_{2m} возрастает с увеличением m, оставаясь при этом ограниченной. Следовательно, S_{2m} имеет положительный

[4]Г. Лейбниц(1646–1716) – немецкий философ, математик, физик, языковед.

предел $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$. При этом, так как $S_{2m} < u_1$, то ясно, что $0 < S \leqslant u_1$.

Рассмотрим теперь сумму нечётного числа членов:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

При $m \to +\infty$ имеем:

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to+\infty}(S_{2m} + u_{2m+1}) = \lim_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim_{m\to+\infty} u_{2m+1} = S,$$

так как по условию $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty} u_{2m+1} = 0$.

Таким образом, частичные суммы как чётного, так и нечётного числа членов ряда имеют общий предел S. Это означает, что вообще $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится. При этом, как видно из доказательства, сумма ряда S не превосходит первого члена ряда.

Пример 12.1. *Исследовать на сходимость ряд*

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} - \dots .$$

Решение: Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1)\frac{1}{1\cdot 2^2} > \frac{1}{2\cdot 3^2} > \frac{1}{3\cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \dots;$$

$$2)\lim_{n\to+\infty}|u_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

Следовательно, ряд сходится.

12.3. Достаточный признак сходимости знакопеременных рядов

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая знакопеременного ряда. Предположим, что в ряде

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \qquad (12.2)$$

числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ могут быть как положительными, так и отрицательными.

Для таких рядов имеет место следующий признак сходимости.

Теорема 12.2. *(достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если для знакопеременного ряда (12.2)*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \tag{12.3}$$

составленный из абсолютных величин его членов, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный ряд, составленный из членов рядов (12.2) и (12.3):

$$\frac{u_1 + |u_1|}{2} + \frac{u_2 + |u_2|}{2} + \dots + \frac{u_n + |u_n|}{2} + \dots .$$

Имеем:

$$\text{при } u_n > 0: \quad |u_n| = u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{|u_n| + |u_n|}{2} = |u_n|;$$

$$\text{при } u_n < 0: \ |u_n| = -u_n \text{ и } \frac{u_n + |u_n|}{2} = \frac{u_n + (-u_n)}{2} = 0.$$

Таким образом, члены этого вспомогательного ряда либо равны членам сходящегося ряда (12.3), либо меньше их. Поэтому он сходится на основании первого признака сравнения.

Умножив все члены сходящегося вспомогательного ряда на $\frac{1}{2}$, получим сходящийся ряд

$$\frac{|u_1|}{2} + \frac{|u_2|}{2} + \dots + \frac{|u_n|}{2} + \dots .$$

Рассмотрим теперь ряд, являющийся разностью этих рядов:

$$\left(\frac{u_1 + |u_1|}{2} - \frac{|u_1|}{2}\right) + \left(\frac{u_2 + |u_2|}{2} - \frac{|u_2|}{2}\right) + \dots + \left(\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right) + \dots .$$

Этот ряд также сходится.

Но ряд (12.2) получается из последнего ряда умножением всех его членов на 2:

$$2 \cdot \left[\frac{u_n + |u_n|}{2} - \frac{|u_n|}{2}\right] = 2 \cdot \frac{u_n}{2} = u_n.$$

Следовательно, на основании свойств числовых рядов исходный ряд (12.2) также сходится.

Пример 12.2. *Исследовать на сходимость знакопеременный ряд:*

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots . \tag{12.4}$$

Р е ш е н и е: Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\ .$$

Этот ряд сходится, как обобщенный гармонический ряд с показателем $p=2>1$. Следовательно, на основании доказанного признака сходится и данный знакопеременный ряд.

12.4. Абсолютная и условная сходимость

Признак сходимости знакопеременного ряда является достаточным, но не необходимым. Это значит, что существуют знакопеременные ряды, которые сходятся, в то время как ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Действительно, рассмотрим ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\dots, \tag{12.5}$$

который, очевидно, сходится по признаку Лейбница. Между тем, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots,$$

составленный из абсолютных величин членов данного ряда (12.5), является гармоническим и, следовательно, расходится.

Хотя оба рассмотренных выше ряда (12.4) и (12.5) сходятся, однако характер их сходимости различен.

Ряд (12.4) сходится одновременно с рядом, составленным из абсолютных величин его членов, тогда как ряд, составленный из абсолютных величин членов сходящегося ряда (12.5), расходится.

В связи с этим введем следующие определения.

Определение 12.1. *Знакопеременный ряд* $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $|u_1|+|u_2|+|u_3|+\dots+|u_n|+\dots$, *составленный из абсолютных величин его членов.*

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Определение 12.2. *Знакопеременный ряд* $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ *называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд* $|u_1|+|u_2|+$

$+ |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$, *составленный из абсолютных величин его членов, расходится.*

Возвращаясь к рассмотренным выше примерам, можем сказать, что ряд (12.4) является абсолютно сходящимся, а ряд (12.5) — условно сходящимся.

Среди знакопеременных рядов абсолютно сходящиеся ряды занимают особое место. Это объясняется тем, что на такие ряды переносятся основные свойства конечных сумм. Особое значение имеет свойство переместительности, которым обладают только абсолютно сходящиеся ряды.

Это свойство, которое мы приводим без доказательства, формулируется следующим образом.

Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от любой перестановки его членов. Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать.

Наоборот, в неабсолютно сходящемся ряде нельзя переставлять члены, так как в случае их перестановки может изменяться сумма ряда и даже получиться расходящийся ряд.

Говоря о перестановке членов, мы подразумеваем, что меняем местами бесконечное множество членов, так как, переставляя два, три, четыре или любое конечное число членов, мы, очевидно, не изменим суммы ряда.

Рассмотрим в качестве примера условно сходящийся ряд (12.5)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots,$$

сумму которого обозначим через S.

Переставим члены этого ряда, поместив после каждого положительного члена два отрицательных. Получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots . \qquad (12.6)$$

Обозначим частичные суммы ряда (12.5) через S_n, а ряда (12.6) – через σ_n. Тогда

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, S_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$S_6 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{37}{60}, \dots;$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \sigma_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{7}{24},$$

$$\sigma_9 = \frac{7}{24} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} = \frac{37}{120}, \ldots .$$

Следовательно, $\sigma_3 = 0,5S_2, \sigma_6 = 0,5S_4, \sigma_9 = 0,5S_6, \ldots$ и вообще, как можно показать, $\sigma_{3m} = 0,5S_{2m}$. Так как $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$, то $\lim\limits_{m\to+\infty} \sigma_{3m} = 0,5 \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = 0,5S$. Таким образом, последовательность частичных сумм ряда (12.6) с номерами, кратными трем, имеет своим пределом $0,5S$.

Далее, находим

$$\lim_{m\to+\infty} \sigma_{3m+1} = \lim_{m\to+\infty} \left(\sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1}\right) = 0,5S$$

и

$$\lim_{m\to+\infty} \sigma_{3m+2} = \lim_{m\to+\infty} \left(\sigma_{3m} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{4m+2}\right) = 0,5S.$$

Итак, мы показали, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \sigma_n$ существует при любом законе стремления n к бесконечности. Это и означает, что ряд (12.6) сходится. При этом его сумма составляет половину суммы ряда (12.5), из которого он получен перестановкой членов.

12.5. Остаток ряда и его оценка

Рассмотрим сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots . \tag{12.7}$$

Как известно, его сумма S является пределом последовательности частичных сумм $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ при $n \to +\infty$, т.е. $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Поэтому для достаточно больших n имеем приближённое равенство

$$S \approx S_n, \tag{12.8}$$

точность которого возрастает с увеличением n. Для оценки точности приближённого равенства (12.8) введем понятие остатка сходящегося ряда.

Определение 12.3. *Разность между суммой ряда S и его n-й частичной суммой S_n называется n-м остатком сходящегося ряда (12.7).*

Остаток ряда обозначается через r_n:

$$r_n = S - S_n. \tag{12.9}$$

Как видно из равенства (12.9), остаток ряда представляет собой сумму сходящегося ряда, полученного из данного ряда отбрасыванием n его первых членов:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k} + \dots .$$

Из определения остатка ряда ясно, что

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty}(S - S_n) = S - \lim_{n\to+\infty} S_n = S - S = 0.$$

Абсолютная погрешность при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n, очевидно, равна модулю остатка ряда:

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n|. \tag{12.10}$$

Таким образом, если требуется найти сумму ряда с точностью до $\varepsilon > 0$, то надо взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| < \varepsilon$. Однако в большинстве случаев находить остаток r_n точно мы не умеем. Поэтому выясним, как найти номер остатка n, чтобы его модуль не превосходил заданного числа ε.

Теорема 12.3. *(об оценке остатка знакоположительного ряда). Если все члены сходящегося знакоположительного ряда*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \tag{12.11}$$

не превосходят соответствующих членов другого сходящегося знакоположительного ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots , \tag{12.12}$$

то n-й остаток ряда (12.11) не превосходит n-го остатка ряда (12.12).

Доказательство. Обозначим n-е остатки рядов (12.11) и (12.12) через r_n и r'_n:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots ;$$

$$r'_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots .$$

Каждый из этих остатков является суммой сходящегося знакоположительного ряда.

Так как по условию $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}, u_{n+2} \leqslant v_{n+2}, \ldots$, то на основании первого признака сравнения сумма первого ряда не превосходит суммы второго ряда, т. е. $r_n \leqslant r'_n$.

Если даны два сходящихся ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots, \tag{12.13}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \ldots, \tag{12.14}$$

причём члены ряда (12.14) больше соответствующих членов ряда (12.13), то ряд (12.14) называется *мажорирующим* рядом по отношению к ряду (12.13).

Из предыдущей теоремы следует, что остаток *мажорирующего ряда всегда больше или равен остатку основного ряда.*

Обычно в качестве мажорирующего ряда берут ряд, остаток которого r'_n можно легко вычислить (например, геометрическую прогрессию).

Тогда, по только что доказанной теореме, мы легко оценим остаток r_n данного ряда.

Пример 12.3. *Оценить третий остаток ряда*

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)5^n} + \ldots$$

Решение: Каждый член этого ряда меньше соответствующего члена геометрической прогрессии

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \ldots.$$

со знаменателем $q = 1/5$. Следовательно, третий остаток r_3 данного ряда меньше третьего остатка r'_3 этой прогрессии:

$$r_3 < r'_3 = \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \cdots = \frac{1/5^4}{1 - 1/5} = \frac{1}{500}.$$

Таким образом, сумма данного ряда отличается от суммы его трёх первых членов меньше, чем на $\dfrac{1}{500}$.

Теорема 12.4. *(об оценке остатка знакопеременного ряда). Пусть дан абсолютно сходящийся знакопеременный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \ldots. \tag{12.15}$$

Тогда абсолютная величина его n-го остатка не превосходит n-го остатка ряда, составленного из абсолютных величин членов данного ряда.

Доказательство. Пусть знакопеременный ряд (12.15) сходится абсолютно. Это значит, что сходится и ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \tag{12.16}$$

Рассмотрим n-е остатки рядов (12.15) и (12.16):

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots; r'_n = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + |u_{n+3}| \dots.$$

При любом p имеем:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $p \to +\infty$, получим

$$\lim_{p\to+\infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leqslant \lim_{p\to+\infty} |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

или $|r_n| \leqslant r'_n|$, что и требовалось доказать.

Пример 12.4. *Оценить третий остаток r_3 ряда*

$$\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \dots.$$

Р е ш е н и е: Данный ряд – знакопеременный, так как, например,

$$\sin 1 > 0, \sin 2 > 0, \sin 3 > 0, \sin 4 < 0, \sin 5 < 0, \sin 6 < 0, \sin 7 > 0, \dots.$$

Рассмотрим ряд

$$\left|\frac{\sin 1}{2}\right| + \left|\frac{\sin 2}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3}{2^3}\right| + \dots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| + \dots.$$

Так как $\left|\dfrac{\sin n}{2^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$, то его члены не превосходят соответствующих членов геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots.$$

Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

Обозначим остатки данного ряда, составленного из абсолютных величин, и геометрической прогрессии соответственно через r_3, r'_3, r''_3, где $|r_3| < r_3' < r_3''$. Таким образом, находим оценку третьего остатка данного ряда:

$$|r_3| < r_3'' = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1/2^4}{1 - 1/2} = \frac{1}{8}.$$

Следствие из теоремы 12.1 (об оценке остатка знакочередующегося ряда, сходящегося по признаку Лейбница). Если знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница, то его остаток по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов ряда.

Пример 12.5. *Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда*

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Данный ряд сходится по признаку Лейбница, поэтому

$$\Delta_S = |S - S_n| = |r_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Так как сумма ряда должна быть вычислена с точностью до 0,01, то достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| \leqslant u_{n+1} \leqslant 0,01$, или

$$\frac{1}{(2n+1)!} \leqslant 0,01.$$

Это неравенство выполняется, начиная с n=2. Таким образом, $S \approx S_2 = \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{3!} \approx 1 - 0,17 = 0,83$.

Практическое занятие 12. Знакопеременные ряды

Пример 12.1. *Исследовать сходимость знакопеременного ряда*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots .$$

Р е ш е н и е: Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots .$$

Полученный ряд – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с основанием $q = \dfrac{1}{2} < 1$ и, следовательно, ряд сходится. По признаку сходимости знакопеременных рядов, если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд, причём сходится абсолютно.

Пример 12.2. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n+6}.$$

Р е ш е н и е: Знакочередующиеся ряды исследуются на сходимость по признаку Лейбница, который для сходимости ряда требует выполнения двух условий:

- 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ для данного ряда $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5n+6} = 0$,
- 2) $|u_n| \geqslant |u_{n+1}|$ для данного ряда $\dfrac{1}{11} > \dfrac{1}{16} > \dfrac{1}{21} > \cdots$.

Следовательно, условия признака Лейбница выполняются и ряд сходится. С учётом, того, что ряд, составленный из модулей членов исходного знакочередующегося ряда $u_n = \dfrac{1}{5n+6}$, расходится, знакочередующийся ряд $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{5n+6}$ сходится условно.

Пример 12.3. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{10n+9}.$$

Р е ш е н и е: Для данного ряда не выполняется первое условие признака Лейбница $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Действительно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{10n+9} =$ $= \dfrac{1}{10} \neq 0$. Следовательно, ряд расходится.

Пример 12.4. *Исследовать сходимость знакочередующегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 ... (3n-1)}.$$

Р е ш е н и е: Исследуем по признаку Даламбера ряд, составленный из модулей членов данного знакочередующегося ряда.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n+1) \cdot (2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 ... (3n-1) \cdot (3n+2)}}{\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 ... (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 ... (3n-1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

По признаку Даламбера ряд из модулей сходится. Значит, сходится абсолютно данный знакочередующийся ряд.

Пример 12.5. *Исследовать сходимость знакопеременного ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}.$$

Р е ш е н и е: При любых значениях n функция $\sin n\alpha$ – функция ограниченная $|\sin n\alpha| \leqslant 1$, поэтому члены данного ряда будут меньше соответствующих членов ряда $v_n = \dfrac{1}{(\ln 10)^n}$, который сходится по признаку Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln 10)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} < 1.$$

Следовательно, по признаку сходимости знакопеременных рядов сходится исследуемый ряд, причем сходится абсолютно.

Пример 12.6. *Сколько членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ *необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?*

Р е ш е н и е: По признаку Лейбница данный знакочередующийся ряд сходится, поэтому по теореме об оценке остатка сходящегося знакочередующегося ряда: $\triangle_S = |S - S_n| = |r_n| \leqslant |u_{n+1}| \leqslant 0,001$ или

$$|u_{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leqslant 0,001 = \frac{1}{1000} \Rightarrow n+1 \geqslant 1000 \Rightarrow n \geqslant 999.$$

Ответ: n=999.

Самостоятельная работа

Исследовать сходимость знакопеременных рядов

Пример 12.7. $1 - \dfrac{1}{2^4} - \dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{4^4} - \dfrac{1}{5^4} - \dfrac{1}{6^4} + \cdots.$

Пример 12.8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}.$

Пример 12.9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(n^3+1)}.$

Пример 12.10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{3n+1}{2n+1}\right)^n.$

Пример 12.11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)}{7\cdot9\cdot11...(2n+5)}.$

Пример 12.12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{10^n}\right).$

Пример 12.13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n2^{-n}.$

Пример 12.14. *Сколько членов ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(2n+1)\cdot5^n}$ *нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?*

Пример 12.15. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos5n}{5^n+1}.$

Пример 17.14. $\lim\limits_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$.

Пример 17.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$.

Пример 17.16. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Лекция 18. Функциональные ряды

Область сходимости функционального ряда. Правильно сходящиеся ряды и их свойства. Степенные ряды.

18.1. Область сходимости функционального ряда

Ранее мы познакомились с рядами, членами которых являются числа. Рассмотрим теперь ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x). \tag{18.1}$$

Определение 18.1. *Ряд (18.1), членами которого являются функции, определённые в некоторой области изменения аргумента x, называется функциональным рядом.*

Если в функциональный ряд вместо x подставить некоторое значение x_0 из области определения всех его функций, то получится числовой ряд.

Определение 18.2. *Точка $x = x_0$, при подстановке которой в (18.1) получится сходящийся числовой ряд, называется точкой сходимости функционального ряда (18.1).*

Определение 18.3. *Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его областью сходимости.*

Частичная сумма функционального ряда, т.е. сумма первых n его членов

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \tag{18.2}$$

является функцией переменой x, определённой в области сходимости ряда.

Действительно, из определения области сходимости функционального ряда следует, что для любой точки x этой области существует предел $S_n(x)$ при $n \to +\infty$. В точках же, не принадлежащих области сходимости, $S_n(x)$ не имеет предела.

Если функциональный ряд сходится и имеет сумму $S(x)$, то разность $S(x) - S_n(x)$, как и для числового ряда, называется n-м остатком ряда и обозначается $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

Очевидно, что если ряд сходится, то должен быть выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(x) = 0 \tag{18.3}$$

во всех точках сходимости ряда, где также

$$\lim_{n \to +\infty} r_n(x) = 0. \tag{18.4}$$

Для определения области сходимости функционального ряда обычно сначала используют признак Даламбера (теорема 11.4), применяемый к ряду, составленному из абсолютных величин ряда (18.1):

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1. \tag{18.5}$$

Все точки x, удовлетворяющие (18.5), входят в область сходимости ряда.

Из признака Даламбера следует, что в случае, если предел последующего члена ряда к предыдущему равен единице, ряд может сходиться или расходиться. Поэтому в граничных точках промежутка, точки которого удовлетворяют (18.5), ряд также может сходиться, так как в них

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = 1. \tag{18.6}$$

Вопрос о сходимости ряда в точках удовлетворяющих (18.6), решается непосредственной подстановкой их значений в ряд (18.1).

Пример 18.1. *Определить область сходимости функционального ряда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+3)^n}.$$

Решение:

$$u_n = \frac{1}{n(x+3)^n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+3)^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(x+3)^n}{(n+1)(x+3)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|x+3|} < 1.$$

Следовательно, $|x+3| > 1 \ \Rightarrow x > -2$ и $x < -4$.
Проверим сходимость ряда в точках $x = -2$ и $x = -4$:

- $x = -2$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический ряд, расходится;
- $x = -4$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(-1)^n}$ – знакочередующийся ряд, сходится по признаку Лейбница, но сходится условно, так как ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$

  является расходящимся.

Таким образом, область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(x+3)^n}$ состоит из всех точек $x \in (-\infty, -4] \cup (-2, +\infty)$.

Пример 18.2. *Определить область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x}$.

Решение: $u_n = n\sqrt[3]{\cos^n x}, \quad u_{n+1} = (n+1)\sqrt[3]{\cos^{n+1} x}$;

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)\sqrt[3]{\cos^{n+1} x}}{n\sqrt[3]{\cos^n x}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\sqrt[3]{\cos x}\right|.$$

Этот предел меньше единицы при всех x, кроме $x_k = k\pi$, $k = 0, \pm1, \ldots$. При целых значениях k получатся ряды:

- при чётном k: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x_k} = 1 + 2 + 3 + \ldots,$
- при нечётном k: $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x_k} = -1 + 2 - 3 + \ldots + (-1)^n n + \ldots$.

Оба ряда расходятся, т.к. не выполняется необходимый признак сходимости, следовательно, областью сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\cos^n x}$ является вся числовая ось, кроме точек $x_k = k\pi, k = 0, \pm 1, \ldots$.

Пример 18.3. *Определить область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n+2}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^n$.

Р е ш е н и е: В область сходимости функционального ряда входят точки, в которых выполняется неравенство (18.7).

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < 1. \tag{18.7}$$

В нашем случае

$$u_n(x) = \frac{1}{3n+2}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^n, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3n+5}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5}\left|\frac{5-x}{8x-3}\right| < 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+2}{3n+5} = 1,$$

то область сходимости определяется неравенством

$$\left|\frac{5-x}{8x-3}\right| < 1 \;\text{ или системой }\; -1 < \frac{5-x}{8x-3} < 1.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases}\dfrac{5-x}{8x-3} > -1,\\[2ex] \dfrac{5-x}{8x-3} < 1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{5-x}{8x-3} + 1 > 0,\\[2ex] \dfrac{5-x}{8x-3} - 1 < 0.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{7x+2}{8x-3} > 0,\\[2ex] \dfrac{9x-8}{8x-3} > 0.\end{cases}$$

Методом интервалов определяем, что этой системе удовлетворяют точки $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right) \bigcup \left(\frac{8}{9}, +\infty\right)$. Исследуем дополнительно сходимость ряда в точках, где предел отношения последующего члена ряда к предыдущему равен единице:

- $x = \dfrac{8}{9} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3n+2}$. Сравнив этот ряд с гармоническим, получим, что он расходится;
- $x = -\dfrac{2}{7} \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+2} \Rightarrow$ сходится по признаку Лейбница. Ясно, что в этой точке ряд сходится условно.

Итак, окончательно область сходимости ряда

$$x \in \left(-\infty, -\frac{2}{7}\right] \bigcup \left(\frac{8}{9}, +\infty\right)$$

18.2. Правильно сходящиеся функциональные ряды и их свойства

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная, и производная суммы конечного числа функций равна сумме производных этих функций. Функциональные же ряды содержат бесконечное число слагаемых и указанные свойства не всегда справедливы и для них.

Определение 18.4. *Функциональный ряд (18.1) называется правильно сходящимся в области D, принадлежащей области его сходимости, если в любой точке этой области все члены ряда не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося знакоположительного ряда.*

В некоторых учебниках правильно сходящийся ряд называется мажорируемым, а соответствующий числовой ряд, с которым он сравнивается, мажорирующим. В более подробных курсах вводят определение равномерной сходимости, на котором в наших лекциях мы останавливаться не будем. Приведем без доказательства три теоремы для правильно сходящихся функциональных рядов, определяющих их свойства, о которых говорилось в начале этого пункта.

Теорема 18.1. *Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся в области D, сходится абсолютно в любой точке этой области.*

Пример 18.4. *Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ абсолютно сходится при любом $x \in (-\infty, +\infty)$.*

Р е ш е н и е: Действительно, $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$ при любых x, а следовательно, члены данного ряда не превышают по модулю соответствующие члены сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, тогда по теореме 18.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ сходится правильно и абсолютно при любых x.

Теорема 18.2. *Если ряд из непрерывных функций правильно сходится в области D, то его сумма есть функция непрерывная в этой области.*

Теорема 18.3. *Если ряд (18.1), составленный из функций, имеющих непрерывные производные, сходится в области D и его сумма равна $S(x)$, а ряд из производных его членов сходится в этой области правильно, то производная суммы ряда $S'(x)$ равна сумме ряда, составленного из производных его членов. Это значит, что такой ряд можно почленно дифференцировать в области D.*

Из функциональных рядов мы рассмотрим лишь степенные ряды, а в дальнейшем (в третьем семестре) – тригонометрические ряды.

18.3. Степенные ряды

Определение 18.5. *Степенным рядом называется функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ..., \qquad (18.8)$$

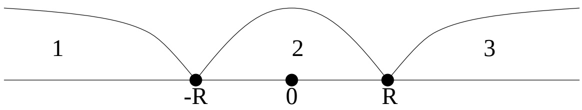
членами которого являются произведения постоянных a_0, a_1, . . . , a_n на разность $(x - x_0)$ в соответствующих целых степенях n. Постоянные a_1, . . . , a_n, . . . называются коэффициентами степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, степенной ряд (18.8) примет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ..., \qquad (18.9)$$

который мы прежде всего и рассмотрим.

Определим область сходимости этого ряда. Для этого рассмотрим знакоположительный ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18.9) и применим к нему достаточный признак сходимости



1 – область, где ряд расходится;
2 – область, где ряд сходится;
3 – область, где ряд расходится.

Рис. 103. *Область сходимости степенного ряда*

Даламбера (18.5).

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Откуда

$$|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \tag{18.10}$$

Определение 18.6. *Число $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ называется радиусом сходимости степенного ряда (18.9), при всех $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, при $|x| > R$ – расходится. Интервал $(-R; R)$ называется интервалом сходимости ряда (18.9).*

В точках $x = \pm R$ сходимость или расходимость ряда устанавливается проверкой сходимости числовых рядов, полученных после подстановки в (18.9) $x = -R$ и $x = R$. Областью сходимости степенного ряда (18.9) является интервал $(-R; R)$, к которому, в зависимости от конкретных случаев, могут быть добавлены один или оба конца отрезка $[-R; R]$ (рис. 103). В каждой точке интервала $(-R; R)$ ряд (18.9) сходится абсолютно.

Очевидно, любой степенной ряд вида (18.9) сходится при $x = 0$. Если других точек сходимости нет, радиус сходимости $R = 0$. Если же ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$, то будем считать, что радиус сходимости $R = +\infty$.

Пример 18.5. *Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.*

Решение: $u_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$; $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;
$R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1.$

Интервал сходимости $(-1;1)$.

Проверяем граничные точки:

- $x = 1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, при $\alpha \leqslant 1$ – расходится;
- $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ – знакочередующийся ряд условно сходится.

Следовательно, область сходимости ряда $[-1;1)$.

Пример 18.6. *Найти область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Решение: $a_n = \dfrac{1}{n!}$; $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$; $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} =$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$

Следовательно, область сходимости ряда $x \in (-\infty;+\infty)$.

При определение радиуса сходимости в этом примере использовано соотношение $(n+1)! = n!(n+1)$.

Для степенных рядов может быть доказана теорема.

Теорема 18.4. *Пусть степенной ряд (18.9) имеет интервал сходимости $(-R;R)$, а $r < R$ произвольное положительное число. Тогда ряд (18.9) является правильно сходящимся на отрезке $[-r;r]$. По свойству правильно сходящихся рядов:*

- *Степенной ряд (18.9) абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости и, следовательно, степенные ряды можно почленно складывать и умножать (как многочлены). При этом интервалом сходимости полученного степенного ряда будет множество всех точек, в которых сходятся складываемые или перемножаемые ряды.*
- *Сумма степенного ряда (18.9) является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости.*

- *Степенной ряд (18.9) можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.*

Естественно, что радиус сходимости степенного ряда (18.8) также равен

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

однако интервал сходимости будет

$$(x_0 - R; x_0 + R), \tag{18.11}$$

т.к. применив к ряду (18.8) признак Даламбера, получим

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

и, следовательно, ряд (18.8) сходится в интервале

$$|x - x_0| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R. \tag{18.12}$$

В точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ сходимость устанавливается так же, как и для ряда (18.9) в точках $x = -R$ и $x = R$.

Пример 18.7. *Найти область сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n}$.

Р е ш е н и е:
$a_n = \dfrac{1}{4^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{4^{n+1}}$; $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4^{n+1}}{4^n} = 4$.
Интервал сходимости $|x-3| < 4$ или $x \in (-1; 7)$.
Рассмотрим граничные точки $x = 7$ и $x = -1$:

- $x = 7$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{4^n}{4^n} = 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$;
- $x = -1$: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-3)^n}{4^n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n}{4^n} = 1 - 1 + 1 - 1 \ldots.$

Оба ряда расходятся, т.к. предел u_n не равен нулю. Область сходимости совпадает с интервалом сходимости $x \in (-1; 7)$.

$$b) \quad \lim_{x\to+0}\Big(\operatorname{ctg} 2x\Big)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Лекция 19. Формула и ряд Тейлора

Многочлен Тейлора.Формула Тейлора. Ряд Тейлора. Формулы и ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и использование их для вычисления пределов и в приближённых вычислениях.

Формула и ряд Тейлора[9] относятся к числу важнейших понятий математического анализа. Они широко используются в математике. В частности, в этом семестре мы будем использовать их при исследовании функций, приближённом вычислении значений функций, численном решении уравнений и оценке возникающих при этом ошибок.

19.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в некотором интервале, содержащем точку x_0. Построим многочлен степени $m < n$

$$P_m(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \cdots + C_m(x - x_0)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k(x - x_0)^k, \qquad (19.1)$$

коэффициенты которого определим из условия совпадения значений этого многочлена и его m производных с соответствующими значениями функции $y = f(x)$ и её производных в точке x_0.

$$\begin{cases} P_m(x_0) = C_0 = f(x_0), \\ P'_m(x_0) = C_1 = f'(x_0), \\ P''_m(x_0) = 2\cdot 1\cdot C_2 = f''(x_0), \\ P'''_m(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3 = f'''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(k)}_m(x_0) = k\cdot(k-1)...2\cdot 1\cdot C_k = f^{(k)}(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P^{(m)}_m(x_0) = m\cdot(m-1)...2\cdot 1\cdot C_m = f^{(m)}(x_0). \end{cases} \qquad (19.2)$$

[9]Б. Тейлор(1685–1731) – английский математик.

Члены в производных от многочлена (19.1), содержащие множитель $(x - x_0)$ в точке x_0, равны нулю. Производные порядка выше m от многочлена m-й степени также равны нулю. Из (19.2) имеем

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \ldots, m. \tag{19.3}$$

В (19.3) положено $0! = 1, f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Следовательно, искомый многочлен (19.1) с коэффициентами C_k, определяемыми по формуле (19.3), будет

$$P_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m = \tag{19.4}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Определение 19.1. *Многочлен (19.4) называется m-м многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x - x_0)$.*

Если функция $f(x)$ сама по себе является многочленом степени m, то запись ее в виде (19.4) всегда возможна и означает лишь представление данного многочлена по степеням разности $(x - x_0)$.

Пример 19.1. *Представить функцию $f(x) = x^2$ в виде многочлена Тейлора по степеням $(x - 3)$.*

Решение: Имеем $f(3) = 9, f'(3) = 6, f''(3) = 2$. Все производные выше второго порядка от $f(x) = x^2$ равны нулю. Следовательно, многочлен Тейлора при $x_0 = 3$ для $f(x) = x^2$ имеет вид

$$P_2(x) = 9 + 6(x - 3) + (x - 3)^2.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, очевидно, получим данную функцию $f(x) = x^2$.

Пример 19.2. *Пусть $f(x) = (a + x)^m$ и $x_0 = 0$.*

Тогда по (19.4)

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{((a + x)^m)^{(k)}_{x=0}}{k!}\, x^k = (a + x)^m,$$

где

$$((a + x)^m)^{(k)} = m(m - 1)\ldots(m - k + 1)(a + x)^{m-k}_{x=0} =$$
$$= m(m - 1)\ldots(m - k + 1)\, a^{m-k}$$

есть k-я производная от $(a+x)^m$ в точке $x=0$. Положив теперь $x=b$, получим формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\, a^{m-k}b^k = a^m + ma^{m-1}b + \tag{19.5}$$

$$+\dots+\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}\, a^{m-k}b^k + \dots + mab^{m-1} + b^m,$$

которую мы использовали в лекции 6 при выводе предела

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

19.2. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ не является многочленом, её всегда можно представить в виде

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + R_m(x). \tag{19.6}$$

Определение 19.2. *Формула (19.6) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$, а $R_m(x)$ называется m-м остаточным членом формулы Тейлора и определяет отличие $f(x)$ от многочлена Тейлора (19.4).*

Будем искать остаточный член в виде, подобном $m+1$-му члену

$$R_m(x) = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}\, Q(x), \tag{19.7}$$

где функция $Q(x)$ неизвестна. Выразим её через $f^{(m+1)}(x)$.

Поскольку многочлен $P_m(x)$ определен на основании (19.2), то из (19.6) получаем

$$R_m(x_0) = R'_m(x_0) = \dots = R_m^{(m)}(x_0) = 0, R_m^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x),$$

т.к. $P_m^{(m+1)}(x) = 0$. Обозначим $\varphi(x) = (x-x_0)^{m+1}$. Очевидно, что

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(m)}(x_0) = 0, \varphi^{(m+1)}(x) = (m+1)!.$$

Функции $R_m(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши, приведённой в лекции 17. Следовательно, на основании этой теоремы и указанных выше свойств функций $R_m(x)$ и $\varphi(x)$,

$$\frac{R_m(x)}{\varphi(x)} = \frac{R_m(x) - R_m(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{R'_m(x_1)}{\varphi'(x_1)},$$

где $x_1 \in (x_0, x)$. Применяя теперь теорему Коши к $R'_m(x_1)$ и $\varphi'(x_1)$ и последующим их производным, получим

$$\frac{R'_m(x_1)}{\varphi'(x_1)} = \frac{R'_m(x_1) - R'_m(x_0)}{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)} = \frac{R''_m(x_2)}{\varphi''(x_2)} = \cdots =$$

$$= \frac{R_m^{(m)}(x_m)}{\varphi^{(m)}(x_m)} = \frac{R_m^{(m)}(x_m) - R_m^{(m)}(x_0)}{\varphi^{(m)}(x_m) - \varphi^{(m)}(x_0)} = \frac{R_m^{(m+1)}(x_{m+1})}{\varphi^{(m+1)}(x_{m+1})},$$

где $x_{k+1} \in (x_0, x_k), k = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно,

$$\frac{R_m(x)}{\varphi(x)} = \frac{R_m^{(m+1)}(x_{m+1})}{\varphi^{(m+1)}(x_{m+1})} = \frac{f^{(m+1)}(x_{m+1})}{(m+1)!},$$

где последнее соотношение получено на основании рассмотренных выше свойств функций $R_m(x)$ и $\varphi(x)$.

Обозначив $x_{m+1} = \xi$, имеем

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,\varphi(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,(x - x_0)^{m+1}.$$

Следовательно, искомая функция $Q(x) = f^{(m+1)}(\xi)$.

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\,(x - x_0)^{m+1}, \tag{19.8}$$

где $\xi \in (x_0, x)$ и вся неопределенность остаточного члена, т. е. отличие нашей функции $f(x)$ от многочлена $P_m(x)$, заключена в неизвестном значении ξ. Положив для удобства $m + 1 = n$, формулу (19.6) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x - x_0)^n. \tag{19.9}$$

Определение 19.3. *Формула (19.9) называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа*

$$R_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x - x_0)^n, \tag{19.10}$$

в которой точка $\xi \in (x_0, x)$ не определена и зависит от x и n. Формула (19.9) при $x_0 = 0$ является представлением функции $f(x)$ в виде многочлена в окрестности начала координат и часто называется формулой Маклорена[10].

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\, x^n, \tag{19.11}$$

где положено $\xi = \theta x, 0 < \theta < 1$.

При x близком к x_0, остаточный член является, очевидно, неизвестной бесконечно малой величиной порядка n при $x \to x_0$ и формула (19.9) может быть записана в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, (x - x_0)^k + O((x - x_0)^n), \tag{19.12}$$

где $O(\alpha^n)$ есть обозначение бесконечно малой величины порядка n при $\alpha \to 0$. Выведенные выше формулы (19.9) и (19.12) позволяют сформулировать важную теорему.

Теорема 19.1. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде (19.9) или при $x \to x_0$ по формуле (19.12).*

19.3. Ряд Тейлора

Докажем ещё одну важную теорему.

Теорема 19.2. *Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и её некоторой δ-окрестности, т. е. для всех $x \in (|x - x_0| \leqslant \delta)$ непрерывные производные любого порядка, ограниченные одним и тем же числом M, то она разлагается в этой окрестности точки x_0 в сходящийся к $f(x)$ степенной ряд.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n. \tag{19.13}$$

Доказательство: По условиям теоремы $|f^{(n)}(x)| \leqslant M, n = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда из (19.10):

$$|R_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{n!}\, |x - x_0|^n \to 0 \text{ при } n \to +\infty. \tag{19.14}$$

[10] К. Маклорен(1698-1746) – шотландский математик.

Приведённая оценка (19.14) получена на основании того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ для любого a. Следовательно, формула (19.9) переходит в ряд (19.13), что и доказывает теорему (19.2).

Определение 19.4. *Ряд (19.13), к которому по теореме (19.2) сходится функция $f(x)$, называется рядом Тейлора.*

Для $x_0 = 0$ соответствующий ряд (19.13) часто называют рядом Маклорена .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n. \tag{19.15}$$

Покажем, что выведенная в лекции 17 формула Лагранжа (17.4), или формула конечных приращений, является частным случаем формулы Тейлора (19.9) при $n = 1$.

Действительно, из (19.9) при $n = 1$ следует

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0). \tag{19.16}$$

Положив $x_0 = a$ и $x = b$, получим $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$,где $\xi \in (a, b)$. Это и есть формула конечных приращений Лагранжа.

Рассмотрим представление по формуле Тейлора (19.9) (чаще всего это будет формула Маклорена (19.11)) и разложение в ряд Тейлора (19.13) или Маклорена (19.15) некоторых элементарных функций и определим их области сходимости.

19.4. Показательная функция $f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$

Так как $x_0 = 0$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 0, 1, \ldots, f^{(n)}(\xi) = e^{\xi}$, то по формуле (19.11):

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} \cdot x^n, \tag{19.17}$$

где $0 < \theta < 1$.

Поскольку для функции $f(x) = e^x$ при любом $x = N \in (-\infty, +\infty)$ производные любого порядка $f^{(n)}(x) = e^N$ ограничены одним и тем же числом $M = e^N$, то по теореме (19.2) предыдущей лекции формула (19.17) переходит в соответствующий ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{19.18}$$

который сходится к e^x на $(-\infty, +\infty)$.

Пример 19.3. *Вычислим* $e^{-1} = 1/e$ *с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: По (19.18) при $x = -1$,

$$1/e = e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Это знакочередующийся ряд и по теореме Лейбница остаток ряда не превышает своего первого члена. Следовательно, ошибка при вычислении величины e^{-1} не больше первого из отброшенных членов ряда её представляющего

$|\frac{(-1)^n}{n!}| \leqslant \varepsilon, n! \geqslant 1/\varepsilon = 10^4$, откуда $n = 8$, т. к. $8! = 40320 > 10^4$.

Итак, $1/e = 1/2 - 1/6 + 1/24 - 1/120 + 1/720 - 1/5040 = 0,3679$.

Первый из неучитываемых членов $\frac{(-1)^8}{40320} < 0,25 \cdot 10^{-4}$.

Пример 19.4. *Вычислить число* e *с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: Ряд Маклорена (19.18) при $x = 1$ будет знакоположительным и для оценки ошибки вычисления числа e надо воспользоваться формулой (19.17). Оценим величину остаточного члена $\frac{e^\theta x}{n!} x^n$ при $x = 1:$

$$\varepsilon = e^\theta/n! < e/n! < 3/n!, \quad n! > 3 \cdot 10^4,$$

т.е. $n = 8$, как и в примере 19.3. Следовательно, с заданной точностью

$$e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 + 1/5040 = 2,7183.$$

19.5. Функция $f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$

Как показано в лекции 16 $f^{(k)}(x) = \sin(x+\pi k/2)$, $f^{(k)}(0) = \sin(\pi k/2)$. Так как $|\sin(x + \pi k/2)| \leqslant 1$ и, следовательно, все производные $f(x)$ не превышают единицу, по теореме (19.2) предыдущей лекции $\sin x$ разлагается в сходящийся к ней на $(-\infty, +\infty)$ ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \qquad (19.19)$$

19.6. Функция $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$

Продифференцировав обе части (19.19), получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \qquad (19.20)$$

В качестве примера рассмотрим применение разложений (19.19) и (19.20) к нахождению предела.

Пример 19.5. *Показать, что*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2} \ .$$

Р е ш е н и е: Из (19.20) имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

и, следовательно,

$$\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} = \frac{1 - \dfrac{m^2x^2}{2} + O(x^4) - 1 + \dfrac{n^2x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} =$$

$$= \frac{n^2 - m^2}{2} + \frac{O(x^4)}{x^2} = \frac{n^2 - m^2}{2} + O(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{n^2 - m^2}{2}.$$

19.7. Функция $f(x) = (1+x)^m, \quad x_0 = 0$

Здесь

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1).$$

Запишем формально ряд Маклорена для этой функции

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!}\, x^k, \qquad (19.21)$$

где m – любое действительное число. Определим радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(n+1)!}{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(m-n)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1.$$

Следовательно, правая часть формулы (19.21) есть сходящийся при $|x| < 1$ ряд и, как показывается, он сходится к функции $(1+x)^m$. Сходимость при $|x| = 1$ необходимо рассматривать отдельно, что мы делать не будем.

Определение 19.5. *Ряд (19.21) для* $(1+x)^m$ *называется биномиальным рядом.*

Используем (19.21) для вычисления предела.

Пример 19.6. *Найти* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Р е ш е н и е: Из (19.21) имеем при $m = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2),$$
$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x+O(x^2)}{x} = \lim_{x\to0}(1+O(x)) = 1.$$

Рассмотрим ещё пример приложения биномиального ряда к приближённому вычислению корней $\sqrt[m]{a}$. Прежде всего надо найти число b, близкое к a, из которого корень m-й степени извлекается элементарно, и такое, чтобы их разность была бы, по крайней мере, меньше b.

Тогда $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b+x} = \sqrt[m]{b}\sqrt[m]{1+\dfrac{x}{b}} = \sqrt[m]{b}\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Затем $\left(1+\dfrac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$ необходимо разложить в биномиальный ряд и взять необходимое для нужной точности число членов.

Пример 19.7. *Вычислить* $\sqrt{5}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Р е ш е н и е:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+0.25)} = 2\Big(1+\frac{1}{4}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 + \ldots\Big).$$

Полученный ряд является знакочередующимся и для того, чтобы вычислить $\sqrt{5}$ с нужной точностью, необходимо учитывать лишь те члены, которые по модулю больше 10^{-3}.

Поэтому $\sqrt{5} = 2 + 0,25 - 0,0156 + 0,0020 = 2.236$.

19.8. Функция $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0$

Для этой функции

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}; \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!.$$

Соответствующий ряд Маклорена примет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{19.22}$$

Он сходится к функции $\ln(1+x)$ на множестве $(-1 < x \leqslant 1)$

Полученный ряд (19.22) можно также использовать для вычисления пределов.

Пример 19.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)-\ln(1+x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 - x + \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Займемся теперь вычислением логарифмов. По формуле (19.22) вычислить логарифмы можно лишь для чисел от 0 до 2. Получим теперь формулу, позволяющую вычислить логарифмы любых положительных чисел.

Заменим в формуле (19.22) x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}. \tag{19.23}$$

Вычтем теперь из равенства (19.22) соотношение (19.23):

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (19.24)$$

Положив $\dfrac{1+x}{1-x}=a$, получим $x=\dfrac{a-1}{a+1}$.

Формулу (19.24) можно использовать для вычисления логарифмов любых положительных чисел.

Ошибки при вычислении логарифмов с помощью конечного числа членов ряда (19.24) можно оценить следующим образом. По a определим x, затем берем несколько членов в формуле (19.24):

$$\ln a=2\Big(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big)+r_n. \qquad (19.25)$$

Остаток ряда r_n и есть ошибка. Учитывая, что

$$\frac{1}{2n+5}<\frac{1}{2n+3},\quad \frac{1}{2n+7}<\frac{1}{2n+3} \text{ и т. д., получим}$$

$$r_n=2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3}+\frac{x^{2n+5}}{2n+5}+\ldots\Big)<2\Big(\frac{x^{2n+3}}{2n+3}+\frac{x^{2n+5}}{2n+3}+ \qquad (19.26)$$

$$+\frac{x^{2n+7}}{2n+3}+\ldots\Big)=2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}(1+x^2+x^4+\ldots)=2\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\frac{1}{1-x^2}.$$

Так как $|x|<1$ то $1+x^2+x^4+\ldots$ есть бесконечно убывающая геометрическая последовательность с $q=x^2$, её сумма равна $\dfrac{1}{1-x^2}$

Пример 19.9. *Вычислить* $\ln 3$, *с точностью* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: В формуле (19.24) положим $a=3$, а $x=\dfrac{3-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}$. Тогда по (19.26) должно быть $\dfrac{2\cdot 4}{(2n+3)\cdot 3\cdot 2^{2n+3}}=\dfrac{1}{3(2n+3)\cdot 4^n}<10^{-4}$. Это неравенство выполняется при $n=5$ следовательно,

$$\ln 3=2\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{11}{3\cdot 2^{11}}\Big)=1+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 16}+$$
$$+\frac{1}{7\cdot 64}+\frac{1}{9\cdot 256}+\frac{1}{11\cdot 1024}=1,0986.$$

Хотя в данной сумме шестое слагаемое и меньше 10^{-4}, его нельзя отбрасывать, так как тогда ошибка будет больше 10^{-4}. Напомним, что только для знакочередующегося ряда ошибка не превышает первого из не учитываемых членов, а в случае знакоположительных рядов ошибку чаще всего оценивают, сравнивая остаток ряда с геометрической убывающей прогрессией, что мы и сделали в нашем примере.

Практическое занятие 19. Формула и ряд Тейлора

В лекциях 18 и 19 получены формулы, дающие представление некоторых функций по формуле Тейлора и рядом Тейлора. На практическом занятии проделаем подобные операции для некоторых других функций, а также воспользуемся разложениями (19.18) – (19.25).

Пример 19.1. *Разложить в ряд Маклорена (19.11) функцию* $f(x) = 3^x$.

Р е ш е н и е: Найдем значение функции $f(x) = 3^x$ и её производных в точке x=0:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 3^x|_{x=0} = 1,\\
&f^I(0) = 3^x \cdot \ln 3|_{x=0} = \ln 3,\\
&f^{II}(0) = 3^x \cdot \ln^2 3|_{x=0} = \ln^2 3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n-1)}(0) = 3^x \cdot \ln^{n-1} 3|_{x=0} = \ln^{n-1} 3,\\
&f^{(n)}(\theta x) = 3^{\theta x} \cdot \ln^n 3.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в формулу (19.11):

$$3^x = 1 + x \cdot \ln 3 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 3}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1} \cdot \ln^{n-1} 3}{(n-1)!} + \frac{3^{\theta x} \cdot \ln^n 3}{n!} \cdot x^n.$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n-1}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\theta x} \cdot \ln^n 3}{n!}$$

при любом фиксированном x=C равен нулю. Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{\theta C} \cdot \ln^n 3}{n!} C^n < 3^C \lim_{n\to+\infty} \frac{(C \cdot \ln 3)^n}{n!} = 3^C \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!},$$

так как при любом конечном a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$. Следовательно, по теореме (19.2) функция $f(x) = 3^x$ представима своим рядом Тейлора (Маклорена) при любых x:

$$3^x = 1 + x \cdot \ln 3 + \frac{x^2 \cdot \ln^2 3}{2!} + \dots + \frac{x^n \cdot \ln^n 3}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \cdot \ln^n 3}{n!}.$$

Это представление можно было бы получить и просто заменой x на $x\ln 3$ в формуле (19.18) и не проделывать все вышеприведённые выкладки.

Пример 19.2. *Представить рядом Маклорена функцию* $f(x) = \cos^2 x$.

Р е ш е н и е: Найдем значения функции $f(x) = \cos^2 x$ и её производных в точке x=0:

$$
\begin{aligned}
&f(0) = \cos^2 x|_{x=0} = 1,\\
&f^{I}(0) = -2\cos x \sin x|_{x=0} = -\sin 2x|_{x=0} = 0,\\
&f^{II}(0) = -2^2 \cos 2x|_{x=0} = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = -2,\\
&f^{III}(0) = 2^2 \sin 2x|_{x=0} = -2^2 \sin\left(2x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = 0,\\
&f^{IV}(0) = 2^3 \cos 2x|_{x=0} = -2^3 \sin\left(2x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)|_{x=0} = 2^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n-1)}(0) = -2^{n-2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}(n-2)\right)|_{x=0},\\
&f^{(n)}(\theta x) = -2^{n-1}\sin\left(2\theta x + \frac{\pi}{2}(n-1)\right).
\end{aligned}
$$

При любом фиксированном $x = C$ остаточный член в формуле Маклорена для функции $f(x) = \cos^2 x$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Действительно,

$$\lim_{n\to+\infty} |R_{n-1}(x)| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2^{n-1}\sin\left(2\theta C + \frac{\pi}{2}(n-1)\right)}{n!} \right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = 0.$$

Таким образом, функция $f(x) = \cos^2 x$ разлагается в ряд Маклорена, сходящийся к ней при любом x:

$\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots$

Можно было бы не проделывать все эти вычисления, а воспользоваться формулой $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и разложением (19.20), заменив в нём x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x^4)}{4!} - \frac{(2x^6)}{6!} + \ldots, \text{ тогда} \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) =$$
$$= \frac{1}{2}(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x^4)}{4!} - \frac{(2x^6)}{6!} + \ldots) = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots$$

В приведённых примерах, мы видим,что если удаётся воспользоваться известными разложениями (19.17) - (19.22), предварительно преобразовав функцию $f(x)$,то результат может быть получен значительно быстрее.

Пример 19.3. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = e^{-x^2}$.

Р е ш е н и е: Заменив в формуле (19.18) x на x^2, получим

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Пример 19.4. *Разложить в ряд Маклорена функцию*
$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Р е ш е н и е:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Мы здесь воспользовались разложениями функций $\sin x$ и $\cos x$ в ряд Маклорена. Так как они справедливы при любых x,то и полученное нами разложение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ в ряд Маклорена справедливо при любых x.

Пример 19.5. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$.

Р е ш е н и е: Вынесем 4 из-под корня в знаменателе, затем заменим в формуле для биномиального ряда (19.21) x на $\dfrac{x^2}{4}$ и, положив $m = -\dfrac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^4}{2^2 \cdot 2! \cdot 4^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^6}{2^3 \cdot 3! \cdot 4^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(-1)^n}{n! 2^{3n}} x^{2n}\right).$$

Так как биномиальный ряд (19.21) сходится при $|x| < 1$, в нашем случае $\dfrac{x^2}{4} < 1$, то есть, $-2 < x < 2$.

Пример 19.6. *Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-1$ функцию $f(x) = \ln x$.*

Решение: Подставив в формулу (19.22) $x-1$ вместо x, получим:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) =$$
$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Так как ряд Маклорена для функции $f(x) = \ln(1+x)$ сходится при $-1 < x \leqslant 1$, полученный ряд сходится при $0 < x \leqslant 2$.

Пример 19.7. *Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x}\sin x$.*

Решение: Поскольку степенные ряды можно почленно перемножать, ряд для $e^{-x}\sin x$ можно получить почленным перемножением ряда Маклорена для e^{-x} на ряд для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots)(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots) =$$
$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots$$

Полученный ряд сходится к данной функции на всей числовой оси, поскольку ряды (19.18) для e^{-x} и (19.19) для $\sin x$ сходятся также на всей числовой оси.

Рассмотрим применение формулы и рядов Тейлора к нахождению пределов и приближённому вычислению значений функций.

Как было отмечено в лекции 19, при вычислении некоторых пределов удобно использовать формулу Тейлора в виде (19.12). Рассмотрим несколько примеров.

Пример 19.8. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Решение: Непосредственная подстановка $x = 0$ показывает, что данный предел является пределом типа $\dfrac{0}{0}$. Заменив e^x и $\sin x$ их представлениями по формуле Маклорена (19.18) и (19.19) с точностью до величин $O(x^3)$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+O(x^4)\right)-2-2x-x^2}{x-x+\dfrac{x^3}{3!}+O(x^5)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+O(x^4)}{\dfrac{x^3}{6}+O(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{3}+O(x)}{\dfrac{1}{6}+O(x^2)}=2.$$

Здесь использовано, что

$$\frac{O(x^4)}{x^3}=O(x) \text{ и } \frac{O(x^5)}{x^3}=O(x^2), \text{ а } \lim_{x\to 0}O(x)=\lim_{x\to 0}O(x^2)=0.$$

Пример 19.9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}$.

Р е ш е н и е: В этом примере также мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Подставляя вместо $(1+x)^m$ и $\ln(1+x)$ их представления по формуле Маклорена (19.21) и (19.22), получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\dfrac{x^2}{2}+O(x^3)-x(1+mx+O(x^2))}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\dfrac{1}{2}+m\right)x^2+O(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-m+O(x)\right)=-\frac{1}{2}-m.$$

Рассмотрим теперь применение полученных нами в лекции 19 формул и рядов Тейлора (Маклорена) к приближённому вычислению функций и оценке ошибки таких вычислений.

Пример 19.10. *Вычислить приближённое значение $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена представления функции $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.*

Р е ш е н и е: Подставив $x=\dfrac{1}{3}$ в формулу (19.18), получим:

$$\sqrt[3]{e}=e^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3^4}+\ldots$$

С учётом трёх членов

$$\sqrt[3]{e} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} = 1,388\cdots \approx 1,39.$$

Ошибка такого вычисления равна остатку ряда

$$R_3(x) = \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3^2} + \ldots\right) < \frac{1}{162}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{1}{162}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{1}{324} < 10^{-2}.$$

Для оценки $R_3(x)$ мы использовали то, что $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4\cdot 5\cdot 3^2} < \frac{1}{3^2}$ и т.д., и формулу для суммы бесконечно убывающей прогрессии $S = \frac{a_1}{1-q}$ при $a_1 = 1$ и $q = \frac{1}{3}$.

Пример 19.11. *Вычислить приближённое значение* $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, *взяв три члена разложения функции* $f(x) = e^x$ *в ряд Маклорена.*

Р е ш е н и е: Подставив $x = -\frac{1}{3}$ в формулу (19.18), получим

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = e^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3^3} + \ldots$$

Полученный ряд является знакочередующимся и ошибка δ при замене его суммой первых трёх членов не превышает по абсолютной величине четвёртого члена, т.е. $\delta \leqslant \frac{1}{3!3^3} = 0,00617 < 10^{-2}$. Следовательно, $\frac{1}{\sqrt[3]{e}} = 0,722\ \cdots \approx 0,72$.

В этом примере оценка остатка проводится значительно проще, чем в предыдущем, так как можно использовать признак Лейбница для знакочередующегося ряда, а не проводить оценку остаточного члена в формуле Тейлора.

Пример 19.12. *Вычислить* $\sin 18^\circ$ *с точностью до* 10^{-4}.

Р е ш е н и е: Подставим $18^\circ = \frac{\pi}{10} = 0,314159$ вместо x в ряд (19.19):

$$\sin 18^\circ = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 + \cdots \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0,3090.$$

Этот результат получен с точностью до 10^{-4}, так как первый из неучтённых членов $\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^5 < 10^4$.

Пример 19.13. *Вычислите* $\sqrt[3]{70}$ *с точностью до* 10^{-3}.

Решение: Ближайшее к 70 целое число в кубе равно 64, тогда

$$\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{64+6} = 4\sqrt[3]{1+\frac{6}{64}}.$$

Используя выражение для биномиального ряда (19.21) при $m = \dfrac{1}{3}$ и $x = \dfrac{3}{32}$, получим:

$$\sqrt[3]{70} = 4\left(1+\frac{3}{32}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{32} - \frac{1\cdot 2\cdot 3^2}{2!3^2\cdot(32)^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 3^3}{3!3^3\cdot(32)^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot 3^4}{4!3^4\cdot(32)^4} + \ldots\right) \approx$$

$$\approx 4\left(1 + \frac{1}{64} - \frac{2}{3\cdot 32^2} + \frac{10}{12\cdot 32^3}\right) \approx 4,118.$$

Здесь также первый из неучтённых членов $\dfrac{4\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{32^4} < 10^{-3}$.

Пример 19.14. *Вычислить* $\ln 5$ *с точностью до* 10^{-3}.

Решение: Для вычисления $\ln 5$ воспользуемся разложением (19.24), положив в нём $\dfrac{1+x}{1-x} = 5$, откуда $x = \dfrac{2}{3}$:

$$\ln 5 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2^3}{3\cdot 3^3} + \frac{2^5}{5\cdot 3^5} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2^2}{3\cdot 3^2} + \frac{2^4}{5\cdot 3^4} + \cdots + \frac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}} + \ldots\right).$$

Если мы не будем учитывать члены ряда, начиная с $\dfrac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}}$, то остаток ряда

$$\frac{4}{3}\left(\frac{2^{2n}}{(2n+1)3^{2n}} + \frac{2^{2(n+1)}}{(2n+3)3^{2(n+1)}} + \frac{2^{2(n+2)}}{(2n+5)3^{2(n+2)}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 2^{2n}}{3 \cdot (2n+1)3^{2n}} \left(1 + \frac{(2n+1)2^2}{(2n+3)3^2} + \frac{(2n+1)2^4}{(2n+5)3^4} + \dots\right) <$$

$$< \frac{4 \cdot 2^{2n}}{3(2n+1)3^{2n}} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \dots\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 2^{2n}}{3(2n+1)3^{2n}(1 - \frac{4}{9})} = \frac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}}$$

должен быть меньше 10^{-3}.

При оценке остатка учитывалось, что $\dfrac{2n+1}{2n+3} < 1$, $\dfrac{2n+1}{2n+5} < 1$ и т.д. и что сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $a_1 = 1$ и $q = \dfrac{4}{9}$ равна $\dfrac{9}{5}$.

Итак, задача будет решена, если взять $\dfrac{2^{2n+2}}{5(2n+1)3^{2n-1}} < 10^{-3}$. Это соотношение выполняется при $n = 7$. Следовательно, с нужной нам точностью

$$\ln 5 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{4}{9} + \frac{1}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{7}\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \frac{1}{15}\left(\frac{4}{9}\right)^7\right) = 1{,}609.$$

Самостоятельная работа

Пример 19.15. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = 2^x$.

Пример 19.16. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \sin^2 x$.

Пример 19.17. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = e^{2x}$.

Пример 19.18. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Пример 19.19. *Представить рядом Маклорена функцию* $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Пример 19.20. *Разложить в ряд Тейлора по степеням* $x+1$ *функцию* $f(x) = \ln(2 + x)$.

Пример 19.21. *Разложить в ряд Маклорена функцию* $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+1)^2}$.