ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание индивидуальных заданий

- В примерах 1 найти z^n.
- В примерах 2 решить уравнение.
- В примерах 3 найти действительную и мнимую часть заданной функции.
- В примерах 4 проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$.
- В примерах 5 найти аналитическую функцию по заданной действительной или мнимой части.
- В примерах 6 вычислить интеграл.
- В примерах 7 вычислить интеграл (применить теорему Коши или интегральную формулу Коши).
- В примерах 8 исследовать на сходимость ряд.
- В примерах 9 найти радиус сходимости степенного ряда.
- В примерах 10 разложить заданную функцию в ряд Лорана в окрестности указанной точки z_0 и определить область сходимости этого разложения.
- В примерах 11 найти нули функции и определить их порядок.
- В примерах 12 найти особые точки и определить их характер.
- В примерах 13 найти вычеты в особых точках.
- В примерах 14 вычислить интеграл(применить теорему о вычетах).
- В примерах 15 вычислить интеграл.

Примерный типовой вариант заданий

0.1. Вычислить $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

0.2. Решить уравнение $z^2 - 2iz - 5 = 0$.

0.3. Найти действительную и мнимую часть функции cos(1+i).

0.4. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти производную функции $f(z) = \cos z$.

0.5. Найти аналитическую функцию по заданной действительной части $u = x^3 - 3xy^2$.

0.6. Вычислить интеграл $\int |z| dx$ по радиусу-вектору точки

$z = 2 - i$.

0.7. Применяя теорему Коши или интегральную формулу Коши, вычислить интеграл $\int\limits_c \dfrac{z^2 dz}{z-2i}$, c – окружность радиуса 3 с центром в начале координат.

0.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{i}{n!})$.

0.9. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^2 n}{n!}$.

0.10. Разложить функцию f(z)=$z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана по степеням z.

0.11. Найти нули функции и определить их порядок $(z^2 + 9) \cdot (z^2 + 4)^5$.

0.12. Найти особые точки и определить характер: $e^{\frac{1}{z-2i}}$.

0.13. Найти вычеты в особых точках функции $\dfrac{e^z}{(z+1)^3 \cdot (z-2)}$.

0.14. Применяя теорему о вычетах вычислить интеграл $\int\limits_c \dfrac{dz}{z^4+1}$, $c = (x-1)^2 + y^2 = 1$.

0.15. Вычислить интеграл с бесконечными пределами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+2^2)}$.

Решение примеров типового варианта заданий

0.1. Вычислить $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

Р е ш е н и е: Представим числитель и знаменатель в тригонометрической форме [1, 33.22]:

$(1+i)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$; $(1+i)^5=2^{5/2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$;

$(1-i)=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$; $(1-i)^3=2^{3/2}(\cos\frac{21\pi}{4}+i\sin\frac{21\pi}{4})$.

Выполним деление в тригонометрической форме:

$\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}=\dfrac{2^{5/2}}{2^{3/2}}\left(\cos(\frac{5\pi}{4}-\frac{21\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4}-\frac{21\pi}{4})\right)=2(\cos 4\pi-i\sin 4\pi)=2.$

0.2. Решить уравнение $z^2-2iz-5=0$.

Р е ш е н и е: Используя формулу корней квадратного уравнения, находим $z_{1,2}=i\pm\sqrt{-1+5}=i\pm 2$.

0.3. Найти действительную и мнимую часть функции cos(1+i).

Р е ш е н и е: Используя формулу косинус суммы, получим $\cos(1+i)=\cos 1\cos i-\sin 1\sin i$, так как $\cos i=ch1$ и $\sin i=ish1$, то $\cos(1+i)=\cos 1ch1-i\sin 1sh1$.

Следовательно, действительная часть равна $\cos 1ch1$, мнимая часть равна -$\sin 1\,\mathrm{sh}\,1$.

0.4. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти производную функции $f(z)=\cos z$.

Р е ш е н и е: $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=$ $=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y$. Следовательно $u=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$, $v=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y$, тогда $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\sin x\,\mathrm{sh}\,y$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ $=\cos x\,\mathrm{ch}\,y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\cos x\,\mathrm{sh}\,y$, т.е. $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$, условия Коши-Римана выполняются. Производную найдем по формуле: $f'(z)=-\sin x\,\mathrm{ch}\,y-$ $-i\cos x\,\mathrm{sh}\,y=-(\sin x\cos iy+\cos x\sin iy)=-\sin(x+iy)=-\sin z$ [1, 42.3].

0.5. Найти аналитическую функцию по заданной действительной части $u=x^3-3xy^2$.

Р е ш е н и е: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}$; $v=3x^2y-y^3+\varphi(x)$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=6xy+\varphi'(x)$;

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy$; $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$; $6xy + \varphi'(x) = 6xy$, $\varphi'(x) = 0$, $\varphi(x) = C$, $u + iv = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C)$.

0.6. Вычислить интеграл $\int |z|dx$ по радиусу-вектору точки $z = 2 - i$.

Р е ш е н и е: $\int |z|dz = \int \sqrt{x^2+y^2}(dx+idy) = \int\limits_0^2 \sqrt{x^2+\dfrac{x^2}{4}}dx + $ $+i\int\limits_0^2 \sqrt{x^2+\dfrac{x^2}{4}}(-\dfrac{1}{2})dx = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^2 |x|dx - \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\int\limits_0^2 |x|dx = \dfrac{\sqrt{5}}{4}x^2\Big|_0^2 - \dfrac{\sqrt{5}}{8}ix^2\Big|_0^2 =$ $= \sqrt{5}(1 - \dfrac{i}{2})$.

0.7. Применяя теорему Коши или интегральную формулу Коши, вычислить интеграл $\int\limits_c \dfrac{z^2dz}{z-2i}$, c – окружность радиуса 3 с центром в начале координат.

Р е ш е н и е: Воспользуемся формулой $\int\limits_c \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$:

$\int\limits_c \dfrac{z^2dz}{z-2i} = \int\limits_c \dfrac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i f(z) = 2\pi i(-4) = -8\pi i$.

0.8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{i}{n!})$.

Р е ш е н и е: Рассмотрим ряды $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}$. Первый ряд сходится как ряд Дирихле $\sum \dfrac{1}{n^p}$ при p=2. Исследуем второй ряд по признаку Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$ – ряд сходится. Следовательно, данный ряд сходится.

0.9. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^2n}{n!}$.

Р е ш е н и е: Воспользуемся признаком Даламбера [1, (11.11)]:

R$= \lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}| = \lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{z^{2n+2}n!}{(n+1)!z^{2n}}| = |z|^2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$. Следовательно, ряд сходится на всей плоскости.

0.10. Разложить функцию f(z)=$z^2 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана по степеням z.

Р е ш е н и е: Используя разложение показательной функции $e^t = 1 + \dfrac{t}{1} + \dfrac{t^2}{2!} + ...$; имеем $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + ...$; окончательно

$$f(z) = z^2 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{z \cdot 3!} + \cdots$$

0.11. Найти нули функции и определить их порядок $(z^2+9)(z^2+4)^5$.

Р е ш е н и е: Разложим данное выражение на множители $(z^2+9)(z^2+4)^5 = (z+3i)(z-3i)(z+2i)^5(z-2i)^5$ используя формулу $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$, устанавливаем, что $z_1 = 3i, z_2 = -3i$ – простые нули $z_3 = 2i$, $z_1 = -2i$ – нули пятого порядка.

0.12. Найти особые точки и определить характер: $e^{\frac{1}{z-2i}}$.

Р е ш е н и е: Разложим данную функцию в ряд Лорана [1, 42.4] (используем известное разложение

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \cdots); \; e^{\dfrac{1}{z-2i}} = 1 + \frac{1}{z-2i} + \frac{1}{2!\,(z-2i)^2} + \cdots;$$

ряд содержит бесконечное число членов с отрицательными степенями разности $(z-2i)$ следовательно, $(z-2i)$ – существенно особая точка.

0.13. Найти вычеты в особых точках функции $\dfrac{e^z}{(z+1)^3 \cdot (z-2)}$.

Р е ш е н и е: Данная функция имеет две особые точки: $z = -1$ – полюс третьего порядка и $z = 2$ – простой полюс Найдем вычеты в точке $z = 2$ по формуле [2, (59.9)]:

$Res_{z=2}\; f(z) = \lim\limits_{z \to 2} \dfrac{e^z}{(z+1)^2} = \dfrac{e^2}{27}$

Вычеты в точке $z = -1$ найдем по формуле [2, (59.11)]:

$Res_{z=-1}\; f(z) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z \to -1} \left(\frac{e^z}{z-2}\right)'' = \dfrac{1}{2} \cdot \lim\limits_{z \to -1} \dfrac{e^z}{(z-2)^3} \cdot (z^2 - 6 \cdot z + 10) =$
$= -\dfrac{17}{54 \cdot e}$

0.14. Применяя теорему о вычетах вычислить интеграл $\int\limits_c \frac{dz}{z^4+1}$, $c=(x-1)^2+y^2=1$.

Р е ш е н и е: В области С функция $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ аналитична всюду, кроме точек $z_1=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$ и $z_2=e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$, которые являются простыми полюсами. Найдем вычеты, пользуясь формулой [2, (59,10)]. Имеем $\frac{f_1(z)}{f_2'(z)}=\frac{1}{z^4+1}$, следовательно $\frac{f_1(z)}{f_2'(z)}=\frac{1}{4\cdot z^3}$.

$Resf(z_1)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{+i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$,

$Resf(z_2)=\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Таким образом, $\int\limits_c \frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}+e^{\frac{-3\pi i}{4}}\right)\cdot 1/4=$

$=\frac{\pi i}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\pi i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

0.15. Вычислить интеграл с бесконечными пределами
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2^2)}$.

Р е ш е н и е: Воспользуемся формулой [2, (59,12)]. Введем функцию $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2^2)}$, которая имеет в верхней полуплоскости два простых полюса $z_1=i$ и $z_2=2i$ Вычеты относительно этих полюсов равны

$Res(z_1)=\lim\limits_{z\to i}\frac{1}{(z+i)(z^2+2^2)}=\frac{1}{2i(-1+4)}=\frac{1}{6i}$,

$Res(z_2)=\lim\limits_{z\to 2i}\frac{1}{(z^2+1)(z+2i)}=\frac{1}{(-4+1)4i}=-\frac{1}{12i}$,

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2^2)}=2\pi i\left(\frac{1}{6i}-\frac{1}{12i}\right)=2\pi i\frac{1}{12i}=\frac{\pi}{6}$$