Пример 41.13. *$z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.*

Пример 41.14. *Из всех точек кривой, являющейся линией пересечения параболоида $z = x^2 + y^2$ и плоскости $z = 2x + y$ найти точку M, наиболее удалённую от начала координат.*

Лекция 42. Понятия о функциях комплексной переменной

Функция комплексной переменной. Основные элементарные функции. Производная. Условие Коши-Римана. Аналитическая функция. Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки и их классификация.

42.1. Функция комплексной переменной

В лекции 33 настоящего курса были введены комплексные числа. Определим теперь понятие функции комплексной переменной.

Определение 42.1. *Функцией $w = f(z)$ комплексной переменной z, заданной на области M называется правило, которое каждому значению $z \in M$ ставит в соответствие одно или множество комплексных значений w. В первом случае функция $w = f(z)$ называется однозначной, во втором многозначной. Множество M называется областью определения функции, а совокупность N всех значений w, принимаемых функцией её областью изменения или множеством значений.*

Если значение z откладывать на одной комплексной плоскости, а w — на другой, то функцию $w = f(z)$ можно геометрически представить как некоторое отображение множества M плоскости z на множество N плоскости w.

Определение 42.2. *Если функция $w = f(z)$ однозначна на M и двум равным значениям z соответствуют разные значения w, то такое отображение называется взаимно однозначным или однолистным.*

Ясно, что у такой функции существует обратная $z = f^{-1}(w)$, отображающая множество N плоскости w на множество M плоскости z и являющаяся также взаимно однозначной.

42.2. Основные элементарные функции

Степенная функция (при $n \in N$) $w = z^n$. Эта функция однозначна. Если в плоскостях z и w ввести полярные координаты (перейти к тригонометрической форме комплексного числа): $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, то уравнение функции запишется в виде системы уравнений двух действительных функций:

$$\begin{cases} \rho = r^n, \\ \theta = n\varphi. \end{cases}$$

Из этой системы видно, что функция $w = z^n$ осуществляет отображение, заключающееся в повороте вектора z на угол $(n-1)\arg z$ и в растяжении его в $|z|^n$ раз.

Это отображение однолистно в секторах вида $k\frac{2\pi}{n} < \varphi < (k+1)\frac{2\pi}{n}$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, каждый из которых переходит в плоскость w (с исключенной положительной полуосью).

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ – n-значная (см. лекцию 33). Можно показать, что в любой области M, не содержащей начала координат $z \neq 0$, можно выделить n однозначных функций, каждая из которых принимает одно из значений $\sqrt[n]{z}$. Эти n функций называются ветвями многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Показательная функция $w = e^z$

Напомним, что если $z = x + iy$, то $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ Отсюда при $x = 0$, $y = \varphi$ получаем формулу Эйлера (33.23)

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Отметим, что показательная функция комплексной переменной оказывается периодической с мнимым периодом $2\pi i$. Действительно, по формуле Эйлера $e^{2\pi ki} = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k$, $(k \in Z)$ следовательно

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z \cdot 1 = e^z.$$

Для комплексного числа z можно определить логарифм $\ln z$, как число w, такое, что $e^w = z$. Определённая таким образом логарифмическая функция $w = \ln z$ определена не только для отрицательных действительных чисел, но и для комплексных $z \neq 0$.

Каждое комплексное число z имеет бесчисленное множество логарифмов, мнимые части которых определяются с точностью до слагаемого, кратного 2π:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Для действительных положительных чисел ($\varphi = 0$, $r \neq 0$) значение $\ln z$ при $k = 0$ совпадает с известной ранее логарифмической функцией. Поэтому будем обозначать $\ln z$ значение функции $\ln z$ при фиксированном k (одну ветвь функции $\ln z$). Очевидно, что функция $\ln z$ будет однозначной при $z \neq 0$.

С помощью логарифмической функции можно определить общую степенную функцию $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$, соотношением $z^a = e^{a \ln z}$.

Пример 42.1. *Найти* $\ln(-1)$.

Р е ш е н и е: Представим (-1) в тригонометрической форме: $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$, т.к. для $z = -1$, $|z| = r = 1$, $\varphi = \pi$. В соответствии с определением $\ln z$, получаем:

$$\ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Получили бесконечно много мнимых значений $\ln(-1)$.

Тригонометрические функции $\sin z$, $\cos z$

Определим $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Так определённые тригонометрические функции комплексного переменного позволяют обобщить формулу Эйлера на случай комплексного аргумента: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$.

Кроме того, эти функции (см. лекцию 33) периодичны с периодом 2π, $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\sin 2z = 2\sin z\cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ и т.д. Можно показать, что $\sin z$ и $\cos z$ в комплексной области неограничены.

Пример 42.2. *Найти* $\cos i$.

Р е ш е н и е: В соответствии с определением

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^{1}}{2} \approx 1{,}54.$$

Получим значение большее 1.

42.3. Производная

Определение 42.3. *Если функция $w = f(z)$, где $z = x + iy$, $w = u(x;y) + iv(x;y)$, определена и однозначна в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, то предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ определяется через введенные ранее пределы функции двух переменных:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x;y) + i \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x;y).$$

Таким образом основные свойства предела сохраняются для функции комплексного переменного.

Определение 42.4. *Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 ели она определена и однозначна в этой точке, некоторой её окрестности и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция $f(z)$ называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой её точке.*

Для непрерывных функций комплексной переменной остаются справедливыми известные ранее свойства.

Определение 42.5. *Производной $f'(z)$ функции $f(z)$ называется предел:*

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если этот предел существует, то функция $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.

Известные свойства дифференцируемых функций (так же, как и обычные правила дифференцирования) сохраняются для функций комплексного переменного z, если она задана как $w = f(z)$.

Пример 42.3. *Найти производную функции: $f(z) = z^2 - \sqrt{z} + 3e^z - 5\ln z + \sin z + \cos z + \operatorname{tg} z$.*

Р е ш е н и е:

$$f'(z) = 2z - \frac{1}{2\sqrt{z}} + 3e^z - \frac{5}{z} + \cos z - \sin z + \frac{1}{\cos^2 z}.$$

Если же w задана своей действительной $u = u(x;y)$ и мнимой частью $v = v(x;y)$, то для дифференцируемости функции $w = u + iv$ должна быть выполнена теорема.

Теорема 42.1. *(Условия Коши–Римана). Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ определена в некоторой окрестности точки z и в этой точке функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно выполнение условий.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases} \tag{42.1}$$

При этом:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (42.2)$$

Примем эту теорему без доказательства.

Пример 42.4. *Проверить дифференцируемость $f(z) = \bar{z}$.*

Р е ш е н и е: Комплексно сопряженным для числа $z = x + iy$ называется (см. лекцию 33) число $\bar{z} = z - iy$. Поэтому в данном примере

$$u(x;y) = x,\ v(x;y) = -y \to \frac{\partial u}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y},$$

условие Коши–Римана не выполняется $\Rightarrow$ функция $f(z) = \bar{z}$ не дифференцируема.

Определение 42.6. *Функция $f(z)$ однозначная и дифференцируемая в каждой точке области D, называется аналитической (регулярной, монотонной) в этой области.*

Возникает вопрос: всякая ли функция двух переменных может быть действительной (или мнимой) частью аналитической функции и можно ли по данной действительной (или мнимой) части найти мнимую (действительную) часть и, следовательно, всю аналитическую функцию. Дифференцируя первое из условий (42.1) по x, а второе по y, получаем: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$.

Складывая обе части этих уравнений, получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (42.3)$$

Аналогично для $v(x;y)$ получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \qquad (42.4)$$

Уравнения (42.3), (42.4) называются уравнениями Лапласа, а функции, удовлетворяющие этим уравнениям, называются гармоническими. Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции должны быть гармоническими функциями.

С методами решения уравнений в частных производных, в том числе — уравнения Лапласа, мы познакомимся в III части настоящего курса.

Пример 42.5. *Могут ли быть функции* $\varphi(x;y)=x^3y^2$ *и* $\psi(x;y)=$ $=x^3-3xy^2$ *действительной или мнимой частями аналитической функции.*

Р е ш е н и е: Для того, чтобы $\varphi(x;y)$ или $\psi(x;y)$ были бы действительной или мнимой частями аналитической функции должны быть выполнены условия (42.3) или (42.4). В нашем случае $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2y^2$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=6xy^2$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=2x^3y$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2x^3$ и $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=6xy^2+2x^3\neq 0.$

Следовательно, $\varphi(x;y)=x^3y^2$ не является гармонической функцией и не может быть действительной или мнимой частью аналитической функции.

Рассмотрим теперь $\psi(x;y)$. Найдем

$\dfrac{\partial\psi}{\partial x}=3x^2-3y^2$; $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=6x$; $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=-6xy$; $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-6x$ и $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=$ $=6x-6x=0$, таким образом $\psi(x;y)=x^3-3xy^2$ является гармонической функцией и существует аналитическая функция, у которой $\psi(x;y)=x^3-3xy^2$ может быть действительной или мнимой частью.

С методикой определения аналитической функции по её действительной или мнимой частям мы встретимся в лекции 46 (п. 46.6)

42.4. Ряды Тейлора и Лорана

Аналитические функции, а также и некоторые другие функции комплексной переменной удобно представлять в виде суммы степенных рядов.

Теорема 42.2. *(Коши) Функция* $f(z)$, *аналитическая в открытом круге с центром в точке* a, *представима в нем своим рядом Тейлора:*

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\ldots \qquad (42.5)$$

Известные разложения элементарных функций сохраняются в комплексной области:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots \qquad (42.6)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots \qquad (42.7)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad (42.8)$$

(перечисленные ряды сходятся для любого z)

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \qquad (42.9)$$

$$(1+z)^a = 1 + az + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \dots \qquad (42.10)$$

(последние два ряда сходятся в круге $|z| < 1$).

Возникает вопрос, будет ли сумма произвольного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ аналитической функцией.

Вейерштрасс[1] и Абель[2] доказали это утверждение (теорема 42.4).

Приведем сначала утверждение, определяющее вид области, в которой степенной ряд сходится.

Теорема 42.3. *Областью сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ *является открытый круг с центром в точке* $a :$ $z||z-a| < R$, *где радиус сходимости* R *определяется по формуле:*

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|}. \qquad (42.11)$$

Внутри этого круга ряд сходится, вне — расходится, сходимость на границе требует отдельного исследования.

Доказательство этого утверждения не приводится.

Пример 42.6. *Найти область сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(z-i)^n\sqrt{n}}{2^n}$.

Р е ш е н и е: В соответствии с теоремой (42.3) областью сходимости является круг $|z-i| < R$ с центром в точке i. Найдем радиус

[1]Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик

[2]Нильс Абель (1802–1829) — норвежский математик

сходимости по формуле (42.11):

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot\sqrt{n}}\right|} = 2.$$

Теорема 42.4. *Сумма любого степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ *в круге его сходимости является аналитической функцией.*

Отсюда следует, что внутри круга сходимости сумма этого ряда есть непрерывная функция и его можно почленно дифференцировать.

Для изучения функций, аналитических в кольцевых областях вида $r < |z-a| < R$, где $0 \leqslant r \leqslant +\infty$, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, рассмотрим разложение по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n, \tag{42.12}$$

являющиеся обобщением тейлоровского разложения.

Определение 42.7. *Правая часть разложения (42.12) называется рядом Лорана*[3] *для функции $f(z)$, его часть*

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-a)^n = C_{-1}(z-a)^{-1} + C_{-2}(z-a)^{-2} + \ldots \tag{42.13}$$

называется главной частью ряда Лорана, а $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n = C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots$ *— правильной частью.*

Теорема 42.5. *Функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z-a| < R$ тогда и только тогда, когда она может быть представлена в нем своим рядом Лорана (42.12).*

Лорановское разложение позволяет изучать поведение функций, аналитических везде, за исключением некоторых, так называемых, особых точек.

Определение 42.8. *Точка a называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует выколотая окрестность этой точки $0 < |z-a| < R$, в которой $f(z)$ аналитична.*

[3] Пьер Лоран (1813–1854) французский математик

Различают три типа изолированных особых точек:

a называется устранимой особой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$;

a называется полюсом, если $|f(z)|$ неограниченно возрастает при $z \to a$ (т.е. $f(z)$ является бесконечно большой при $z \to a$;

a называется существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует.

Тип особой точки функции $f(z)$ может быть установлен по виду ряда Лорана в окрестности этой точки и наоборот.

Теорема 42.6. *Для того, чтобы a была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки не содержал главной части, т.е. имел вид: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_n(z-a)^n$.*

Для того чтобы a была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки содержал конечное число членов в главной части, т.е. имел вид: $f(z) = \sum\limits_{n=-k}^{+\infty} C_n(z-a)^n$.

Для того чтобы a была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы её ряд Лорана в окрестности этой точки содержал бесконечно много членов, т.е. имел вид:
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n.$$

Замечание 42.1. *Если a — полюс функции $f(z)$, то число k членов главной части её ряда Лорана называется порядком полюса. Это число называют также порядком нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$, т.к. при $z=a$ обращается в нуль сама функция $\dfrac{1}{f(z)}$ и $n-1$ её производная.*

Определение 42.9. *Функция $f(z)$ называется целой (голоморфной), если она аналитична при всех z (т.е. не имеет конечных особых точек).*

Очевидно, что целая функция представляется рядом Тейлора, сходящимся во всей плоскости. Целыми функциями являются многочлены, показательная функция, $\sin z$, $\cos z$ и др.

Пример 42.7. *Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.*

Р е ш е н и е: Пользуясь разложением (42.7), представим данную функцию в виде ряда Лорана по степеням z:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

В соответствии с теоремой (42.6) $z = 0$ является устранимой особой точкой этой функции.

Пример 42.8. *Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$.*

Р е ш е н и е: Пользуясь разложением (42.8), представим данную функцию в виде ряда Лорана по степеням z:

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

В соответствии с теоремой (42.6) $z = 0$ является полюсом 1-го порядка этой функции. Заметим, что $z = 0$ является нулем первого порядка для функции $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{z}{\cos z}$. Действительно, при $z = 0$ обращается в нуль сама функция $\dfrac{z}{\cos z}$, а её производная

$$\left(\frac{z}{\cos z}\right)' = \frac{\cos z + z \sin z}{\cos^2 z}$$

уже не равна нулю при $z = 0$.

Пример 42.9. *Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(x) = e^{1/z}$.*

Р е ш е н и е: По (42.6) имеем: $e^{1/z} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \dfrac{1}{3!z^3} + \dots$ Главная часть разложения содержит бесконечное число членов, следовательно, точка $z = 0$ для функции $f(z) = e^{1/z}$ является существенно особой.

Самостоятельная работа

Пример 58.6. *Найти поток векторного поля* $\overline{F} = x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ *через поверхность куба, ограниченного поверхностями:* $x = -a$, $x = a$, $y = -a$, $y = a$, $z = -a$, $z = a$ *по теореме Остроградского-Гаусса и непосредственно.*

Пример 58.7. *Найти поток векторного поля* $\overline{F} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + xz\overline{k}$ *через расположенную в первой октанте часть сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Пример 58.8. *Выяснить имеет ли векторное поле* $\overline{F} = yz\overline{i} + zx\overline{j} + xy\overline{k}$ *потенциал и, если да, найти его.*

Лекция 59. Интегралы в комплексной области

Интеграл вдоль линии в комплексной области. Теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Вычет функции в изолированной точке. Применение теории вычетов к вычислению интегралов в комплексной области, к вычислению определённых интегралов и несобственных интегралов с бесконечными пределами

59.1. Интеграл вдоль линии L в комплексной области.

Пусть $L = AB$ кусочно-гладкая линия, т.е. линия, состоящая из отрезков с непрерывной производной, расположена в области S на комплексной области $\boxed{Z}$ (рис. 127).

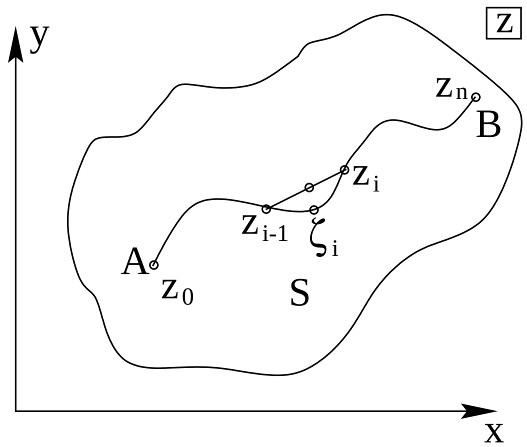

Рис. 127. *К выводу понятия интеграла в комплексной области*

Определение понятия области дано в лекции 35. Разобьем линию L на n частей. Как мы знаем (лекция 33) каждой точке комплексной плоскости соответствует комплексное число. Обозначим начальную и конечную точки L, соответственно, $z_A = z_0$ и $z_B = z_n$. Впишем в L ломаную линию, соединяющую точки разбиения. На каждой элементарной дуге $z_{i-1}z_i$ возьмём точку ξ_i и составив произведения $f(\xi_i)(z_i - z_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta z_i$. Образуем интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$

Определение 59.1. *Интегралом от функции $f(z)$ комплексной переменной z вдоль линии L называется предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i$, при условии, что длины всех элементарных дуг этой линии стремятся к нулю и, следовательно, их число стремится к бесконечности. Этот предел не должен зависеть от способа разбиения L на элементарные дуги и от выбора на каждой из них точки ξ_i. Полученный предел обозначается*

$$\int\limits_L f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i. \tag{59.1}$$

В дальнейшем для сокращения введенный таким образом интеграл (59.1) будем называть просто интегралом вдоль линии L без упоминания комплексной переменной, что уже определяется самой темой лекции.

Как известно студентам, комплексная переменная z (лекция 33) и её функция $f(z)$ (лекция 42) состоят из действительной и мнимой частей, т.е. $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$. Подставив эти выражения z и $f(z)$ в интеграл и, учитывая, что $i^2 = -1$, получим

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy. \tag{59.2}$$

Таким образом, действительная $\mathrm{Re}\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L u(x; y)dx - v(x; y)dy$ и мнимая $\mathrm{Im}\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L v(x; y)dx + u(x; y)dy$ части интеграла вдоль линии L являются криволинейными интегралами по координатам (лекция 57) и обладают всеми свойствами таких интегралов, изученными нами в лекции 57. Рассмотрим два примера на вычисление интегралов вдоль заданной линии L.

Пример 59.1. *Вычислить интеграл* $\int\limits_L \mathrm{Im}z dz$ *вдоль прямой, соединяющей начало координат с точкой* $z = 1 + 2i$ *(рис. 128).*

Р е ш е н и е:

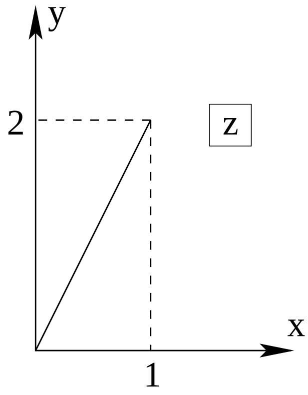

Рис. 128. *К примеру 59.1*

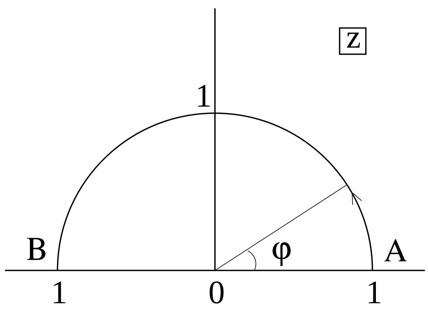

Рис. 129. *К примеру 59.2*

Уравнение линии интегрирования $y = 2x$, $dy = 2dx$. Имеем $\mathrm{Im}z = \mathrm{Im}(x + iy) = y$. Следовательно,

$$\int\limits_{0z} \mathrm{Im}z dz = \int\limits_{0z} y(dx + idy) = \int\limits_0^1 2xdx + i\int\limits_0^1 4xdx =$$

$$= x^2\Big|_0^1 + i \cdot 2x^2\Big|_0^1 = 1 + 2i.$$

Пример 59.2. *Вычислить* $\int\limits_L |z|dz$, *где* L *– верхняя полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 129).*

Р е ш е н и е:

Параметрическое уравнение заданной окружности:

$z = \cos\varphi$; $y = \sin\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$.

Следовательно, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $dz = (-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{AB} |z|dz = \int\limits_0^\pi (-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi = \cos\varphi\big|_0^\pi + i\sin\varphi\big|_0^\pi = -1 - 1 = -2.$$

Если контур интегрирования замкнутый, то, как и для криволинейных интегралов, положительным направлением обхода принято считать такое направление, при интегрировании по которому область, лежащая внутри контура, находится слева, при изменении направления обхода знак интеграла меняется (см. лекцию 57).

Пример 59.3. *Вычислить интеграл* $\oint\limits_L \dfrac{dz}{z}$ *(рис. 130).*

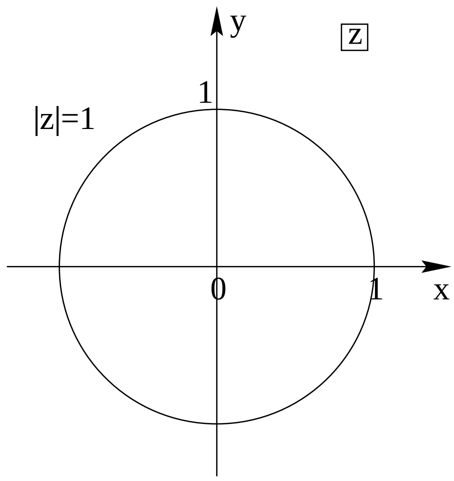

Рис. 130. *К примеру 59.3*

Р е ш е н и е: Представим z в показательной форме $z = |z|e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$ (см. лекцию 33), $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$. Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{i\varphi}d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\varphi\big|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

59.2. Теорема Коши для односвязной области

Теорема 59.1. *Теорема Коши для односвязной области.*
Если функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ *является аналитической в односвязной области* S, *то интеграл* $\oint\limits_L f(z)dz$ *по любому замкнутому*

контуру, принадлежащему этой области равен нулю, а $\int\limits_{L_{AB}} f(z)dz$ *не зависит от вида кривой* L*, а зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования* z_A *и* z_B*.*

Доказательство: В соответствии с формулой (59.2) $\mathrm{Re}\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy$, $\mathrm{Im}\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L vdx + udy$. Как нам известно, для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования L, и, соответственно, по замкнутому контуру был равен нулю необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (57.8) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Для интеграла

$$\int\limits_L udx - vdy : P = u, Q = -v \to \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

для интеграла

$$\int\limits_L vdx + udy : P = v, Q = u \to \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

По условию теоремы функция $f(z) = u+iv$ аналитическая, т.е. для неё выполняются условия Коши-Римана (42.12) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ и, следовательно, условия (57.8) выполнены. Таким образом, действительная и мнимая части интеграла $\int\limits_L f(z)dz$ не зависят от пути интегрирования, а по замкнутому контуру они равны нулю. Следовательно, и сам интеграл $\int\limits_L f(z)dz$ обладает этими свойствами и, в частности, имеет место формула

$$\oint\limits_L f(z)dz = 0. \tag{59.3}$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств интеграла от аналитической функции в многосвязных областях. В лекции 35 дано определение односвязной области. Дадим теперь определение n-связной области.

Определение 59.2. *n-связной областью называется область, граница которой состоит из n отдельных, не связных между собой участков.*

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в 3^x связной области S, граница которой состоит из замкнутых контуров L_0, L_1, L_2 (рис. 131).

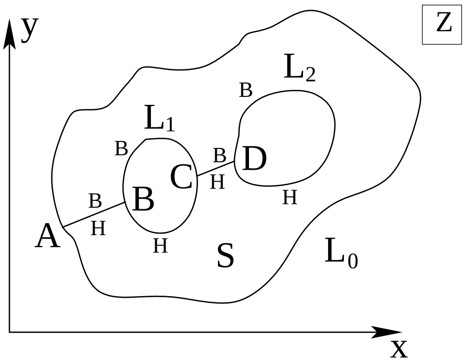

Рис. 131. *Пример 3-х связной области*

Сделав разрезы от точки $A \in L_0$ до точки $B \in L_1$ и от точки $C \in L_1$ до точки $D \in L_2$ мы получим односвязную область, ограниченную непрерывной кривой

$$L = A_{\text{н}} L_o A_{\text{в}} B_{\text{в}} L_{1\text{в}} C_{\text{в}} D_{\text{в}} L_2 D_{\text{н}} C_{\text{н}} L_{1\text{н}} B_{\text{н}} A_{\text{н}},$$

в которой функция $f(z)$ аналитична. Выше индексами «н» и «в» мы обозначали, соответственно, нижний и верхний края разреза. Согласно теореме 59.2

$$\oint\limits_L f(z)dz = \int\limits_{A_{\text{н}} L_0 A_{\text{в}}} + \int\limits_{A_{\text{в}} B_{\text{в}}} + \int\limits_{B_{\text{в}} L_{1\text{в}} C_{\text{в}}} + \int\limits_{C_{\text{в}} D_{\text{в}}} + \int\limits_{D_{\text{в}} L_2 D_{\text{н}}} +$$

$$+ \int\limits_{D_{\text{н}} C_{\text{н}}} + \int\limits_{C_{\text{н}} L_{1\text{н}} B_{\text{н}}} + \int\limits_{B_{\text{н}} A_{\text{н}}} = 0.$$

По свойствам интеграла $\int\limits_{A_{\text{в}} B_{\text{в}}} = - \int\limits_{B_{\text{н}} A_{\text{н}}}$, $\int\limits_{C_{\text{в}} D_{\text{в}}} = - \int\limits_{D_{\text{н}} C_{\text{н}}}$, $\int\limits_{B_{\text{в}} L_{1\text{в}} C_{\text{в}}} + \int\limits_{C_{\text{н}} L_{1\text{н}} B_{\text{н}}} = - \oint\limits_{L_1} f(z)dz$ – по часовой стрелке, $\int\limits_{D_{\text{в}} L_2 D_{\text{н}}} = \oint\limits_{L2} f(z)dz$, $\int\limits_{A_{\text{н}} L_0 A_{\text{в}}} = \oint\limits_{L_0} f(z)dz$.

Таким образом, мы имеем положительный обход против часовой стрелки

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \oint\limits_{L_1} f(z)dz + \oint\limits_{L_2} f(z)dz.$$

В случае n внутренних контуров мы получим формулу

$$\oint\limits_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz \qquad (59.4)$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 59.2. *Теорема Коши для многосвязной области. Если функция $f(z)$ является аналитической в многосвязной области S, то интеграл по внешнему контуру L_0 равен сумме интегралов по внутренним контурам L_k, при этом все они проходятся против часовой стрелки.*

Если среди внутренних границ имеются разрезы или изолированные «выколотые» точки, их следует охватить замкнутыми контурами, внутри которых нет других особых точек.

Пример 59.4. *Вычислить интеграл $\oint\limits_{L}(z-a)^m dz$, где L – замкнутый контур, а m – целое число.*

Р е ш е н и е: Если точка a лежит вне контура L подынтегральная функция $(z-a)^m$ является аналитической внутри L, при любом m и, следовательно, $\oint\limits_{L}(z-a)^m dz = 0$.

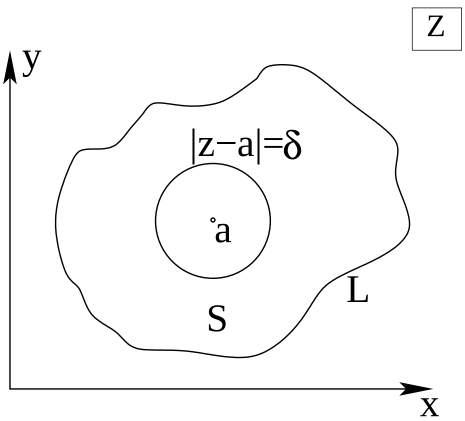

Рис. 132. *δ-окрестности особой точки a, расположенной внутри контура L*

Пусть теперь точка a расположена внутри контура L. Тогда, если $m \geq 0$ подынтегральная функция является аналитической во всей плоскости $\boxed{\mathrm{Z}}$ и, следовательно $\oint\limits_L (z-a)^m dz = 0$. Рассмотрим теперь случай, когда $m < -1$, тогда точка a является особой точкой находящейся внутри L. Рассмотрим некоторую малую δ-окрестность точки a, целиком расположенную внутри L (рис. 132), на границе этой δ-окрестности $C : |z-a| = \delta$, а $z = a + \delta e^{i\varphi}$.

Функция $(z-a)^m$ является аналитической в 2^x связной области S, расположенной между L и C

Следовательно, согласно теореме 59.2

$$\oint\limits_L (z-a)^m dz = \oint\limits_C (z-a)^m dz = \left| \begin{array}{l} m \neq -1 \\ k = -m > 0 \\ z - a = \delta e^{i\varphi} \\ dz = i\delta e^{i\varphi} d\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \oint\limits_{(z-a)=\delta} \frac{dz}{(z-a)^k} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta^k e^{ik\varphi}} = i\delta^{1-k} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e^{i(k-1)\varphi}} =$$

$$= i\delta^{1-k} \frac{e^{-i(k-1)\varphi}}{(1-k)^i} \Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

т.к. e^z является периодической функцией с $T = 2\pi i$.

Пусть теперь $m = -1$, тогда по аналогии с примером (59.3)

$$\oint\limits_{|z-a|=\delta} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{i\varphi} d\varphi}{\delta e^{i\varphi}} = i\varphi|_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Итак, окончательно, имеем

$$\oint\limits_L (z-a)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, \ m = -1, \\ 0, \ m \neq -1. \end{cases} \tag{59.5}$$

59.3. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке

Пусть a – единственная изолированная особая точка, находящаяся внутри контура L.

Определение 59.3. *Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке a называют интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$, для которого принято обозначение*

$$\mathrm{Res} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz. \tag{59.6}$$

Разложим функцию $f(z)$ в окрестности точки a в ряд Лорана (42.4)

$$f(z) = \dots + \frac{C_{-1}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{C_{-1}}{z-a} +$$

$$+ C_0 + C_1(z-a) + \dots + C_n(z-a)^n + \dots$$

Пусть данный ряд сходится в области $0 < |z-a| < R$, т.е. во всех точках, расположенных внутри окружности радиуса R с центром в точке a, кроме самой точки a. Пусть контур L лежит внутри кольца $0 < |z-a| < R$. Проинтегрируем почленно ряд (42.4) по этому контуру

$$\oint\limits_L f(z)dz = \sum_{m=2}^{+\infty} C_{-m}\oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^m} + C_{-1}\oint\limits_L \frac{dz}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k \oint\limits_L (z-a)^k dz.$$

На основании разобранного примера (59.4) все интегралы справа в полученном выражении, кроме $\oint\limits_L \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$, равны нули и, следовательно, $\oint\limits_L f(z)dz = C_{-1}2\pi i$, откуда следует на основании формулы (59.6) вычет в изолированной особой точке a также равен коэффициенту C_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки.

$$\mathrm{Res} f(a) = C_{-1}. \tag{59.7}$$

В лекции 42 дана классификация особых точек функции $f(z)$, согласно которой особая точка является устранимой если соответствующий ряд Лорана не содержит главной части, полюсом n-го порядка – если главная часть содержит n членов, и существенно особой точкой – если бесконечное число членов. На основании сказанного, очевидно, что *вычет функции в устранимой особой точке равен нулю.*

Если точка a является полюсом n-го порядка функции $f(z)$, то разложение этой функции в ряд Лорана имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{C_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (z-a)^k.$$

Умножив обе части этого выражения на $(z-a)^n$ получим

$$(z-a)^n f(z) = C_{-n} + C_{-n+1}(z-a) + \dots + C_{-1}(z-a)^{n-1} + \\ + \sum_{k=0}^{+\infty} C_k (z-a)^{k+n}.$$

Продифференцируем обе части последнего выражения $n-1$ раз

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right) = C_{-1}(n-1)! + C_0 n(n-1)\dots \\ \dots 2(z-a) + C_1(n+1)n\dots 3(z-a)^2 + \dots$$

Переходя к пределу при $z \to a$ получим

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}((z-a)^n f(z)) = C_{-1}(n-1)! = (n-1)!\mathrm{Res} f(a).$$

Откуда, окончательно, находим, что *вычет функции $f(z)$ в полюсе n-го порядка*

$$\mathrm{Res} f(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right). \tag{59.8}$$

Пример 59.5. *Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{z^5}{(z+1)^4}$.*

Р е ш е н и е: Функция $\frac{1}{f(z)} = \frac{(z+1)^4}{z^5}$ имеет в точке $z = -1$ нуль 4-го порядка, следовательно, функция $f(z) = \frac{z^5}{(z+1)^4}$ имеет в этой точке полюс 4-го порядка (см. лекцию 42). По формуле (59.8)

$$\mathrm{Res} \frac{z^5}{(z+1)^4}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to -1} \frac{d^3}{dz^3}\left((z+1)^4 \frac{z^5}{(z+1)^4}\right) = \\ = \frac{1}{3!} \lim_{z\to -1} (z^5)^{III} = \frac{1}{3!} \lim_{z\to -1} 5\cdot 4\cdot 3z^2 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Если *точка a является полюсом 1-го порядка или иначе простым полюсом*, то с учётом того, что $0! = 1$ и $f^0(z) = f(z)$, из (59.8) при $n = 1$ получаем

$$\mathrm{Res} f(a) = \lim_{z\to a} (z-a) f(z). \tag{59.9}$$

Пример 59.6. *Найти вычеты в особых точках функции $f(z) = \\ = \dfrac{z^2}{z^2-1}$.*

Р е ш е н и е: $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-1}{z^2} = \frac{(z-1)(z+1)}{z^2}$ имеем два простых нуля $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Следовательно функция $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2}$ имеет в этих точках простые полюса, которые находим по формуле (59.9)

$$\mathrm{Res}\frac{z^2}{z^2-1}\bigg|_{z=1} = \lim_{z\to1}(z-1)\frac{z^2}{z^2-1} = \lim_{z\to1}\frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^2}{z^2-1}\bigg|_{z=-1} = \lim_{z\to-1}(z+1)\frac{z^2}{z^2-1} = \lim_{z\to-1}\frac{z^2}{z-1} = -\frac{1}{2}.$$

Если функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитические функции в точке a, причём $\varphi(a) \neq 0$, а точка a является простым нулём для знаменателя $\psi(z)$, т.е. $\psi(a) = 0$, но $\psi'(a) \neq 0$, то из формулы (59.8)

$$\mathrm{Res} f(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(a)\lim_{z\to a}\frac{1}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Таким образом, *вычет в простом полюсе a функции* $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$ определяется по формуле

$$\mathrm{Res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\bigg|_{z=a} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{59.10}$$

Пример 59.7. *Найти вычеты в особых точках функции из примера 59.6.*

Р е ш е н и е: $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}$ имеет два простых полюса $a_1 = 1$ и $a_2 = -1$. При $\varphi(z) = z^2$ в этих точках не обращается в нуль. По (59.10) находим

$$\mathrm{Res}\frac{z^2}{z^2-1}\bigg|_{z=1} = \frac{z^2}{2z}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{2};\ \mathrm{Res}\frac{z^2}{z^2-1}\bigg|_{z=-1} = \frac{z^2}{2z}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Если *точка a является существенной особой точкой функции $f(z)$, то только в этом случае приходится раскладывать функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности этой точки и находить коэффициент C_{-1}.*

Пример 59.8. *Найти вычет функции $f(z) = e^{1/z}$ в точке $z = 0$.*

Р е ш е н и е: Точка $z = 0$ является существенной особой точкой функции $f(z) = e^{1/z}$. Ряд Лорана получен для неё в примере 42.3:

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Следовательно, $C_{-1} = 1$ и $\operatorname{Res}\, e^{1/z}\big|_{z=0} = 1$.

59.4. Применение теории вычетов к вычислению интегралов в комплексной области

Теорема 59.3. *Основная теорема о вычетах. Если функция $f(z)$ аналитическая в ограниченной замкнутой области $\overline{S}$ (см. лекцию 35), границей которой является контур L, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in S$, $k = 1, 2 \ldots, n$, то интеграл от L в положительном направлении равен сумме вычетов $f(z)$ в этих особых точках, умноженной на $2\pi i$*

$$\oint\limits_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k). \tag{59.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Окружим каждую особую точку a_k окружностями γ_k, не содержащими внутри себя других особых точек и не пересекающимися друг с другом (рис. 133).

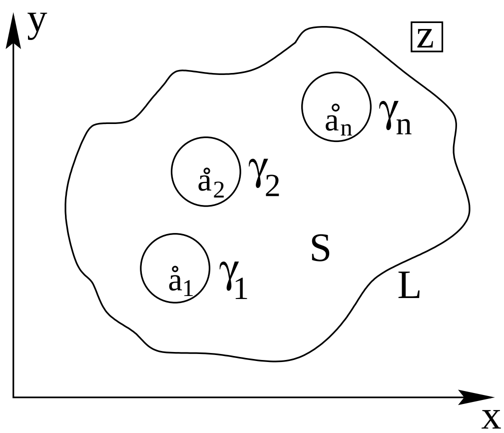

Рис. 133. *К доказательству основной теоремы о вычетах*

В многосвязной области, ограниченной контурами L, γ_1, γ_2, ..., γ_n функция $f(z)$ будет аналитической и, следовательно, по теореме 59.2

$$\oint\limits_L f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz,$$

но по (59.6)

$$\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(a_k),$$

откуда следует формула (59.11) и, следовательно, доказательство теоремы 59.3.

Пример 59.9. *Вычислить* $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4}$.

Р е ш е н и е: Функция $f(z) = \frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4}$ имеет особые точки, в которых знаменатель $z^4+3z^2-4=0$. Разложив $z^4+3z^2-4=0$ на множители $z^4+3z^2-4=(z-1)(z+1)(z-2i)(z+2i)$, находим особые точки $a_1=1$, $a_2=-1$, $a_3=2i$, $a_4=-2i$, которые являются простыми полюсами. Внутри окружности $|z|=3/2$ находятся лишь два из них a_1 и a_2, а a_3 и a_4 лежат вне её (рис. 134).

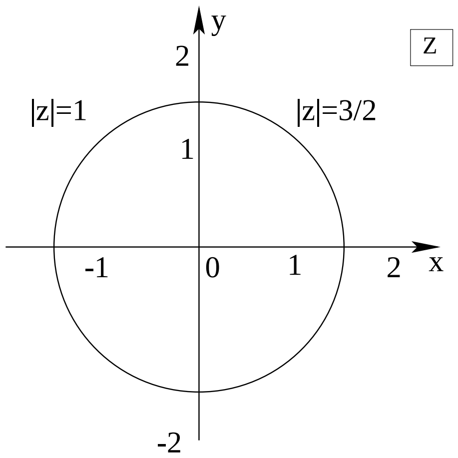

Рис. 134. *К примеру 59.9*

Таким образом,

$$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4} = 2\pi i \left(\mathrm{Res} \frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=1} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{Res} \frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=-1} \right).$$

Для нахождения вычетов в простых полюсах $z=1$ и $z=-1$ нашей функции на основании (59.10) имеем

$$\mathrm{Res} \frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=a} = \frac{e^a}{4a^3+6a},$$

откуда, подставляя $a = 1$ и $a = -1$, получаем

$$\mathrm{Res}\frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=1}\frac{e}{10};\quad \mathrm{Res}\frac{e^z}{z^4+3z^2-4}\bigg|_{z=-1} = -\frac{e^{-1}}{10} = -\frac{1}{10e}.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{|z|=3/2}\frac{e^z dz}{z^4+3z^2-4} = 2\pi i\left(\frac{e}{10}-\frac{1}{10e}\right) = \frac{\pi i}{5e}(e^2-1).$$

59.5. Применение теории вычетов к вычислению определённых интегралов и несобственных интегралов с бесконечными пределами

Для нахождения определённых интегралов оказывается возможным сделать замену, переводящую их в комплексную область и затем применить основную теорему о вычетах.

Пример 59.10. *Найти интеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ $(a > 1)$.

Р е ш е н и е: Положим $e^{i\varphi} = z$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi = izd\varphi$, $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$. Если φ меняется от 0 до 2π, то z проходит окружность единичного радиуса $|z| = 1$. Таким образом

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{iz(a+\frac{z^2+1}{2z})} = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1} =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} z^2+2az+1=0, & \\ z_{1,2} = -a\pm\sqrt{a^2-1} & ,\mathrm{Res}\frac{1}{z^2+2az+1}\Big|_{z_1} = \frac{1}{2z+2a}\Big|_{z_1} \\ z_1\in|z|<1, & \\ z_2\in|z|>1, & \qquad\qquad = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi i\frac{2}{i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Однако значительно больший интерес представляет применение теории вычетов к несобственным интегралам с бесконечными пределами. Это оказывается возможным, когда при переходе в комплексную область соответствующий интеграл по полуокружности радиуса N (рис. 135) стремится к нулю при $N\to+\infty$.

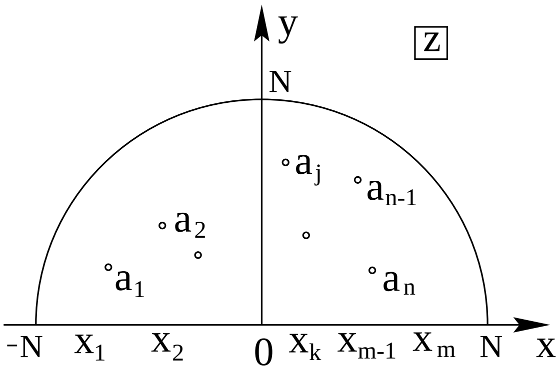

Рис. 135. *К применению теории вычетов к вычислению несобственных интегралов с бесконечными пределами*

Ниже мы сформулируем две теоремы и приведем примеры на их применение.

Теорема 59.4. *Если функция $f(z)$ является аналитической в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}z \geq 0$ за исключением особых точек a_j, $j = 1, 2, \ldots n$ $\mathrm{Im}a_j > 0$, кроме того, для $f(z)$ бесконечно удалённая точка является нулём порядка не ниже второго, то имеет место формула*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res} f(a_j). \tag{59.12}$$

Пример 59.11. *Вычислить* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

Р е ш е н и е: Для функции $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$ бесконечность является нулём 2-го порядка. В верхней полуплоскости имеется два простых полюса (см. пример 33.6 лекции 33)

$$a_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(i \pm 1);\ \mathrm{Res}\frac{z^2+1}{z^4+1}\bigg|_{a_{1,2}} = \frac{a_{1,2}^2+1}{4a_{1,2}^3} = \frac{\frac{1}{2}(i^2 \pm 2i + 1) + 1}{\frac{4}{2\sqrt{2}}(i^3 \pm 3i^2 + 3i \pm 1)} =$$

$$= \frac{\pm i + 1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(i \mp 1)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1 \pm i}{i \mp 1} \cdot \frac{i \pm 1}{i \pm 1} = \frac{\sqrt{2}(i \pm i^2 \pm 1 + i)}{4(i^2 - 1)} = -\frac{\sqrt{2}i}{4}.$$

Таким образом, в соответствии с (59.12)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \pi\sqrt{2}.$$

С помощью следующей теоремы мы найдем некоторые не выражающиеся в элементарных функциях интегралы.

ТЕОРЕМА 59.5. *Если функция $f(z) = g(z)e^{i\alpha z}$, где $\alpha > 0$, $g(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$, является аналитической в верхней полуплоскости* $\mathrm{Im}z \geq 0$ *за исключением особых точек a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$* ($\mathrm{Im}a_j > 0$) *и простых полюсов x_k, $k = 1, \ldots, m$ расположенных на оси x (рис. 135), то имеет место формула*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}f(a_j) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}f(x_k)\right). \qquad (59.13)$$

ПРИМЕР 59.12. *Найти* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ *и* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx.$

Р е ш е н и е: Это так называемые «неберущиеся» интегралы (см. лекцию 43). На основании формулы Эйлера (33.23)

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 59.5, для неё $\alpha = 1$, $g(z) = \frac{1}{z} \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Она имеет один простой полюс в точке $z = 0$ и, следовательно, $\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z}\Big|_{z=0} = \frac{e^{iz}}{1}\Big|_{z=0} = e^0 = 1.$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = 2\pi i\frac{1}{2}\,\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z}\Big|_{z=0} = \pi i.$$

Откуда, приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx = 0, \quad \text{а} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi.$$

Пример 59.13. *Найти* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4-1}\,dx$ *и* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-1}\,dx.$

Р е ш е н и е:
Аналогично примеру 59.12 вводим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^4-1}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-1}dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4-1}\,dx.$$

Функция $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^4-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы (59.5), для неё $\alpha = 1$, $g(z) = \frac{1}{z^4-1} \to 0$ при $z \to +\infty$ очевидно, что $z^4 - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)$ имеет два простых полюса на оси x : $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ и ещё один простой полюс $a_3 = i$ в верхней полуплоскости. Находим в них вычеты используя формулу (59.10)

$$\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z^4-1}\bigg|_{z=a_j} = \frac{e^{ia_j}}{4a_j^3};\ \mathrm{Res}f(1) = \frac{e^i}{4} = \frac{\cos 1 + i\sin 1}{4};$$

$$\mathrm{Res}f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4} = \frac{-\cos 1 + i\sin 1}{4};\ \mathrm{Res}f(i) = \frac{e^{-1}}{-4i} = \frac{i}{4e}.$$

Тогда по формуле (59.10) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-1}\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4-1}\,dx =$$

$$= 2\pi i\left(\mathrm{Res}f(i) + \frac{1}{2}(\mathrm{Res}f(1) + \mathrm{Res}f(-1))\right) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{i}{4e} + \frac{\cos 1 + i\sin 1 - \cos 1 + i\sin 1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2e} - 2\pi\sin 1.$$

Откуда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-1}\,dx = -\pi\left(\frac{1}{2e} + 2\sin 1\right),\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^4-1}\,dx = 0.$$