23	$\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$	$(-\infty,+\infty)$
24	$\dfrac{x^2}{(x^2+25)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$
25	$\dfrac{x+6}{(x^2+4)(x^2+9)}$	$(-\infty,+\infty)$
26	$\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$	$(-\infty,+\infty)$
27	$\dfrac{2x^2+13x}{x^4+13x^2+36}$	$(-\infty,+\infty)$
28	$\dfrac{x^2+2}{x^4+7x^2+12}$	$(-\infty,+\infty)$
29	$\dfrac{6}{(x^2+9)(x^2+1)}$	$(0,+\infty)$
30	$\dfrac{x^2}{(x^2+81)(x^2+16)}$	$(0,+\infty)$

ЧАСТЬ 3

Основные определения и теоремы курса, примеры решения задач

Подробно содержание *части 3* по теме «Теория рядов» изложено в учебном пособии:

Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. «Ряды. Интеграл и преобразование Фурье. Приложения». М.: МИРЭА, 2015.

Данное учебное пособие рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений (инженерно-технические направления подготовки).

Содержание части 3:

- числовые ряды, признаки сходимости; понятие абсолютной и условной сходимости; действия с рядами;

- функциональные ряды, область сходимости; понятие равномерной сходимости ряда; признак Вейерштрасса; непрерывность суммы функционального ряда; почленное интегрирование и дифференцирование ряда;

- степенные ряды и их свойства; теорема Абеля; ряд Тейлора; разложения элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена);

- приложения степенных рядов;

- ряд Фурье; сходимость ряда Фурье; представление периодической функции рядом Фурье;

- комплексные числа, действия с ними;

- функции комплексного переменного;

- аналитическая функция и ее свойства;

- ряды Тейлора и Лорана;

- классификация изолированных особых точек аналитической функции;

- теория вычетов;

- приложения теории вычетов.

ТЕОРИЯ РЯДОВ

§1. Числовые ряды

Числовой ряд, сходимость числового ряда

<u>*Определение.*</u> Пусть задана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Составленное из членов этой последовательности выражение $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется *числовым рядом*, члены последовательности называются членами этого ряда, a_n - общий член ряда. Обычно числовой ряд кратко записывается в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Рассмотрим суммы $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, .\ .\ .\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

<u>*Определение*</u>. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

<u>*Определение*</u>. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

<u>*Определение.*</u> Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Рассмотрим примеры на вычисление суммы ряда по определению.

<u>*Пример*</u>. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + ...$$

<u>*Решение*</u>. Представим общий член ряда в виде разности

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3(3n-1)} - \frac{1}{3(3n+2)}$$

и вычислим частичную сумму с номером n

$$S_n = \left(\frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 5}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3\cdot(3n-1)} - \frac{1}{3\cdot(3n+2)}\right) = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3(3n+2)}$$

Существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1/6$. Значит, данный ряд сходится и его сумма равна $1/6$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots.$$

Решение. Вычислим частичную сумму этого ряда

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2.$$

В этом примере $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, следовательно, данный ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots.$$

Решение. У этого ряда все частичные суммы с нечетными номерами равны 1, а частичные суммы с четными номерами равны 0. Значит, предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Геометрическая прогрессия и гармонический ряд

Определение. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность $b, bq, bq^2, \ldots, bq^{n-1}, \ldots \ (b\neq 0,\ q\neq 0)$. Суммируя члены геометрической прогрессии, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$.

Теорема. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$ сходится при условии $|q|<1$, и его сумма равна $\dfrac{b}{1-q}$. Если $|q|\geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$ расходится.

Доказательство. Запишем частичную сумму этого ряда

$S_{n+1} = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n$ двумя способами:

$S_{n+1} = b + q(b + bq + \ldots + bq^{n-1}) = b + q \cdot S_n$,

$S_{n+1} = (b + bq + \ldots + bq^{n-1}) + bq^n = S_n + bq^n$.

Приравнивая эти выражения: $b + q \cdot S_n = S_n + bq^n$,

получим $S_n(1-q) = b(1-q^n)$.

Предполагая, что $q \neq 1$, выразим S_n: $S_n = \dfrac{b(1-q^n)}{1-q}$.

В случае, когда $q = 1$, очевидно, что $S_n = n \cdot b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$, т.е. ряд сходится, и его сумма $S = \dfrac{b}{1-q}$.

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится. Наконец, если $q = -1$, то частичные суммы попеременно принимают значения b и 0. Предел последовательности частичных сумм не существует. Ряд расходится. Теорема доказана.

<u>*Определение*</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ называется *гармоническим рядом*.

Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, является гармоническим средним соседних с ним членов:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Покажем, что гармонический ряд является *расходящимся*. Для этого воспользуемся тем, что последовательность $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (2-ой замечательный предел). Все члены этой последовательности меньше числа e. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e, \quad n = 1,2,3,\ldots$.

Прологарифмируем данное неравенство по основанию e

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e \quad \Rightarrow \quad n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

. Полученное неравенство справедливо для всех натуральных значений n:

$$1 > \ln 2 - \ln 1; \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2; \quad \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3; \ldots \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Складывая эти неравенства, получим $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$. Это означает, что с возрастанием n частичные суммы гармонического ряда неограниченно возрастают и, следовательно, гармонический ряд расходится.

Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема. Если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Доказательство теоремы. Для сходящегося ряда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. А так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Доказанная теорема – это лишь необходимое условие сходимости. *При нарушении этого условия ряд заведомо расходится*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то, как показывают примеры, приведенные ниже, ряд может сходиться или расходиться. Так, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ необходимое условие сходимости выполнено, но первый из них является сходящимся, а второй – расходящимся.

Необходимое условие сходимости удобно применять для доказательства расходимости рядов.

<u>*Пример*</u>. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ на сходимость.

<u>*Решение*</u>. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$, то заданный ряд расходится по необходимому условию (оно нарушено).

<u>*Пример*</u>. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ на сходимость.

<u>*Решение*</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ является расходящимся, т.к.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)}\right)^{-\frac{n}{3n+2}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0$, т.е. необходимое условие не выполняется.

<u>*Определение*</u>. Если отбросить первые n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_{n+k}\ldots$, который называется *остатком* данного ряда с номером n.

<u>*Теорема.*</u> Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков.

<u>*Следствие.*</u> Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

<u>*Теорема.*</u> Если ряд сходится, то сумма его остатка стремится к нулю с возрастанием номера остатка.

Критерий Коши сходимости рядов. Линейные действия с рядами

<u>*Теорема*</u> (<u>*критерий Коши сходимости ряда*</u>). Для сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер *N*, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел *k* выполнялось неравенство

$$\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}\right| < \varepsilon .$$

Сходящиеся ряды обладают следующими свойствами.

<u>*Теорема*</u>.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна A, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ также сходится и его сумма равна cA, где c - любое число.

Другими словами, если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны A и B соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ также сходится и его сумма равна $A + B$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Числовые ряды с положительными членами

Определение. Положительными называются ряды, все члены которых неотрицательны: $a_n \geq 0$.

Последовательности частичных сумм таких рядов монотонно возрастают, т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Как известно (теорема Больцано-Вейерштрасса), монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Непосредственное применение этого утверждения для доказательства сходимости обычно бывает затруднительным. Проще использовать другие средства, о которых идет речь ниже.

Признаки сравнения

Теорема (первый признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$. Если для всех номеров n (или для всех номеров n, бо́льших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Будем предполагать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполнено для всех номеров n. В противном случае можно отбросить конечное число членов ряда, для которых неравенство не выполнено, что не повлияет на сходимость ряда. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Если ряд (2) сходится, то его частичные суммы, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, ограничены, т.е. $b_1 + b_2 + ... + b_n \le S$ для любого n, где S - некоторая константа. Но тогда ограничена и последовательность частичных сумм ряда (1), и ряд (1) сходится.

Если же ряд (1) расходится, то, предполагая, что ряд (2) сходится, получим противоречие. Теорема доказана.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$.

<u>*Решение*</u>. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Для всех номеров n справедливо неравенство $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$. Согласно первому признаку сравнения данный ряд также сходится.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

<u>*Решение*</u>. Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится. Для всех $n \ge 2$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, следовательно, данный ряд также расходится по признаку сравнения.

<u>*Теорема (предельный признак сравнения)*</u>. Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n , \ (b_n > 0 \text{, начиная с некоторого номера } n). \qquad (2)$$

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то ряды (1) и (2) оба сходятся или оба расходятся.

Доказательство. Предположим, что ряд (2) сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,\ A>0$. По определению предела для любого положительного ε и достаточно больших номеров n будет выполнено неравенство

$$\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon \quad \text{или} \quad a_n<(A+\varepsilon)\cdot b_n.$$

Т.к. ряд (2) сходится, то согласно свойству сходящихся рядов сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)b_n$, а, значит, по первому признаку сравнения сходится и ряд (1).

Рассматривая $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$, который также существует, конечен и отличен от нуля, придем к выводу, что из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2). Итак, если один из рядов сходится, то другой также сходится.

Далее, предполагая, что один из рядов расходится, а другой сходится, получим противоречие с уже доказанным утверждением. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\infty$, то из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

<u>*Решение*</u>. Пользуясь определением сходимости, т.е. рассматривая предел частичных сумм, уже было доказано, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ сходится. Значит, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.к. предел отношения общих членов этих рядов конечен и отличен от нуля

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(3n+2)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\right)=9.$$

Признак Даламбера

<u>*Теорема*</u>. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$. Если $D<1$, то ряд сходится, если $D>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $D<1$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1-D}{2}>0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<D+\varepsilon=D+\frac{1-D}{2}=\frac{1+D}{2}=q<1.$$

Отсюда получим $a_{N+1}<a_N\cdot q$, $\quad a_{N+2}<a_{N+1}\cdot q<a_N\cdot q^2$, ... $a_{N+k}<a_N\cdot q^k$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, согласно первому признаку сравнения, ряд сходится.

Если $D>1$ или $D=\infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Решение. Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{3^n}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}<1,$$ т.е. ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Решение. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема (радикальный признак Коши). Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=K$. Если $K<1$, то ряд сходится, если $K>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $K<1$. Возьмем $\varepsilon=\frac{1-K}{2}>0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = K + \frac{1-K}{2} = \frac{1+K}{2} = q < 1\ ,$$

или $a_n < q^n$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд сходится.

Если $K > 1$ или $K = \infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии и, значит, ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Решение. Вычислим

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1,$ значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2} > 1$, значит, ряд расходится.

Замечание. Признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда соответствующие пределы равны 1. Например, вычислим эти пределы для гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходимость которого была доказана:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln n}{n}} = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

При вычислении последнего предела было использовано правило Лопиталя для раскрытия неопределенности

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right): \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Такой же результат получим, рассматривая сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

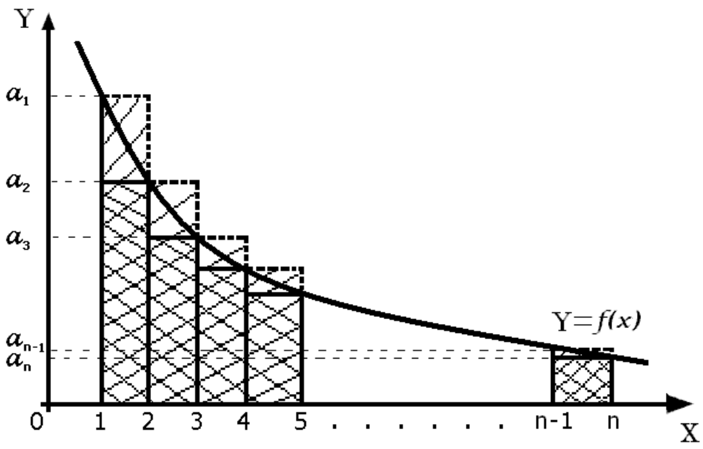
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{2}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{2\ln n}{n}}=e^{-2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}=e^0=1.$$

Интегральный признак Коши

Теорема (интегральный признак Коши) . Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, общий член которого совпадает со значением некоторой функции $f(x)$ при $x=n$: $a_n=f(n)$. Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x\geq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, если сходится $\int_1^{+\infty}f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство. Для иллюстрации рассмотрим график функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, и построим ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=1$, $x=n$, а другая описана около этой трапеции.



Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна $a_2 + a_3 + ... + a_n$, площадь описанной фигуры равна $a_1 + a_2 ... + a_{n-1}$. Площадь самой криволинейной трапеции равна $\int_1^n f(x)dx$ и заключена между площадями вписанной и описанной фигур:

$$a_2 + a_3 + ... + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 ... + a_{n-1}.$$

Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение: $\int_1^{+\infty} f(x)dx = J$. Тогда частичные суммы ряда S_n ограничены:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + J.$$

Следовательно, ряд сходится.

Если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n > \int_1^n f(x)dx + a_n > \int_1^n f(x)dx \to \infty, \quad n \to \infty,$$

следовательно, ряд расходится.

<u>*Пример*</u>. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который называют обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле. Интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при условии $\alpha>1$ и расходится при условии $\alpha\le 1$, следовательно, обобщенный гармонический ряд сходится, если $\alpha>1$, и расходится, если $\alpha\le 1$.

На основе этого примера можно сформулировать следующий признак.

<u>*Признак Дирихле.*</u> Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, если $\alpha>1$, и расходится, если $\alpha\le 1$.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

<u>*Решение.*</u> Соответствующий несобственный интеграл $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_{2}^{+\infty}=+\infty$, а, значит, данный ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Замечание. Выше приведены основные признаки сходимости положительных рядов. Есть другие, более «тонкие» признаки, дающие ответ на вопрос о сходимости рядов в тех случаях, где рассмотренные признаки «не работают».

Знакопеременные числовые ряды

<u>*Определение.*</u> Числовой ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа.

Если отрицательных членов конечное число, то, отбросив их, получим положительный ряд. Если положительных членов конечное число, то, отбросив их, получим отрицательный ряд, который можно исследовать с помощью теорем о сходимости положительных рядов, изменив знаки всех членов ряда. Существенно новым является тот случай, когда среди членов ряда бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных чисел.

Рассмотрим случай, когда знаки членов ряда чередуются, например, члены с нечетными номерами положительны, а члены с четными номерами отрицательны.

Определение. Ряды представленные в виде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ или $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n$, где $a_n > 0$, называются *знакочередующимися* рядами.

Теорема Лейбница *(признак сходимости знакочередующегося ряда*). Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю: $a_{n+1} < a_n$, $n = 1,\ 2,\ 3...$, и стремятся к нулю: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Доказательство. Для определенности возьмем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, $a_n > 0$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Члены ряда сгруппированы так, что все слагаемые этой суммы – положительные числа. Значит, частичные суммы с четными номерами возрастают с ростом n. С другой стороны $S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$ т.е. частичные суммы с четными номерами ограничены первым членом ряда: $S_{2n} < a_1$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, из которого следует, что

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = S$. Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами имеют один и тот же предел и, следовательно, ряд сходится, и его сумма равна S.

<u>Определение</u>. Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

Замечание. Частичные суммы с четными номерами приближаются к сумме ряда S, возрастая, а частичные суммы с нечетными номерами – убывая, т.е. справедливо неравенство: $S_{2n} < S < S_{2n-1}$. В частности, $0 < S < a_1$.

Если первый член ряда Лейбница $-a_1$ отрицателен, то $-a_1 < S < 0$.

В любом случае сумма ряда имеет знак его первого члена и меньше его по модулю.

Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница. Следовательно, сумма остатка имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю. Так для ряда Лейбница легко оценивается разность между суммой и частичной суммой.

<u>Пример</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$, где $a_n = \frac{\ln n}{n}$.

<u>Решение</u>. Для проверки выполнения условий теоремы Лейбница введем функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ и докажем, что она монотонно убывает,

начиная с некоторого значения x, и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Вычислим производную $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ для $x > e$.

Это означает, что, начиная с номера $n = 3$, верно неравенство $a_{n+1} < a_n$. Как уже было показано, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Следовательно, условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд сходится.

Замечание. Составим ряды из модулей членов рассмотренных рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$. Оба эти ряда расходятся. Первый из них является гармоническим, а члены второго, начиная с $n = 3$, больше, чем члены гармонического ряда.

Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан произвольный знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ составлен из модулей его членов.

Теорема. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть сходится ряд из модулей. Тогда согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для любого номера $n > N$ и любого натурального k будет верно неравенство:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon .$$

Для знакопеременного ряда получим оценку

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+k}| < \varepsilon ,$$

что означает, что условие сходимости для него выполняется, т.е. сам знакопеременный ряд сходится.

Определение. Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сам знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Определение. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

При установлении абсолютной сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$.

Решение. Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)=\frac{3}{5}<1$.

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha=\frac{1}{3}$. Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница, т.е. ряд сходится условно.

Без доказательства отметим свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится и имеет ту же сумму. (Другими словами, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством так же, как и конечная сумма).

Если ряд сходится условно, то надлежащей перестановкой его членов можно изменить сумму ряда на любое заданное число, а также сделать ряд расходящимся.

§2. Функциональные ряды

<u>*Определение*</u>. Пусть дана последовательность функций $u_1(x),\ u_2(x),\ ...,\ u_n(x),\ ...$, определенных на некотором множестве X. Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *функциональным* рядом, а множество X – областью определения этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других – расходящимся.

<u>*Определение*</u>. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Например, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ определены при любых значениях x. Областью сходимости первого из них является интервал $(-1,1)$, а областью сходимости второго – промежуток $(1,+\infty)$. Сумма функционального ряда $S(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

Равномерная сходимость функционального ряда

<u>*Определение*</u>. Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится на множестве X. $S_n(x),\ S(x)$ – частичная сумма и сумма этого ряда соот-

ветственно. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ и для любого $x \in X$ будет выполнено неравенство $|r_n(x)| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Другими словами, ряд сходится равномерно на множестве X, если разность между частичной суммой и суммой ряда становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера, одновременно для всех x, принадлежащих множеству X.

Теорема Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ при всех x, принадлежащих множеству X, удовлетворяет неравенству $|u_n(x)| \le a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $a_n \ge 0$ - члены некоторого сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

Доказательство. Абсолютная сходимость функционального ряда при всех $x \in X$ следует из признака сравнения и из сходимости числового ряда. Покажем, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве X. Из условия теоремы следует, что для любого натурального числа k и для любого $x \in X$ верно неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots +$$

$$+ |u_{n+k}(x)| \le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} \le \rho_n,$$ где ρ_n – остаток числового ряда. Переходя в этом неравенстве к пределу при условии $k \to \infty$, получим $|r_n(x)| \le \rho_n$, где $r_n(x)$ – остаток функционального ряда. По условию тео-

ремы числовой ряд сходится, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство $\rho_n < \varepsilon$, а, значит, и для остатка функционального ряда $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, т.е. функциональный ряд сходится равномерно на множестве X.

<u>*Определение.*</u> Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорирующим* числовым рядом для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *числовой мажорантой*.

<u>*Пример*</u>. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x.

<u>*Решение*</u>. Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при всех x. А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

<u>*Пример*</u>. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3 + x^3}$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

<u>*Решение*</u>. Члены данного функционального ряда неотрицательны при $x \in [0, +\infty)$. Для построения мажоранты найдем при каждом фиксированном n максимальное значение функции $u_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^3}$.

Для этого вычислим производную

$$u_n'(x) = \frac{n^3 + x^3 - 3x^3}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{-2x^3 + n^3}{(n^3 + x^3)^2} = \frac{-2\left(x^3 - \dfrac{n^3}{2}\right)}{(n^3 + x^3)^2} .$$

Производная $u_n'(x)=0$ при $x=\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$, и эта точка является точкой максимума функции $u_n(x)$ (проверить, вычислив вторую производную). Максимальное значение $\left(u_n(x)\right)_{\max}=u_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3+\frac{n^3}{2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$.

Значит, члены функционального ряда на множестве $[0,+\infty)$ удовлетворяют неравенству $0\le u_n(x)\le\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$. Поскольку числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то числовой ряд, общий член которого равен $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$, также сходится. В силу теоремы Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на промежутке $[0,+\infty)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, который сходится при всех x и все члены которого непрерывны на всей числовой оси. Сумма ряда $S(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$, если $x\ne 0$, $S(0)=0$, терпит разрыв в точке $x=0$, несмотря на то, что члены ряда непрерывны при всех x. Это объясняется неравномерностью сходимости данного ряда на любом множестве, содержащем точку $x=0$. Покажем, что ряд не является равномерно сходящимся, оценивая остаток ряда при $x\ne 0$

$$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+...=\frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} r_n(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=1$, то остаток ряда не может быть сколь угодно мал одновременно при всех x ни для какого номера n. Следовательно, ряд сходится неравномерно на множестве, содержащем точку $x=0$.

Перейдем к изучению свойств функциональных рядов, сходящихся равномерно на некотором отрезке.

Теорема (непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда). Пусть функции $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ ...)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,\,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0, принадлежащую отрезку $[a,\,b]$, и для любого значения x, также принадлежащего отрезку $[a,\,b]$, оценим разность

$$|S(x)-S(x_0)|=|(S(x)-S_n(x))-(S(x_0)-S_n(x_0)+(S_n(x)-S_n(x_0))|\le$$

$$\le|S(x)-S_n(x)|+|S(x_0)-S_n(x_0)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n такой, что неравенство $|S(x)-S_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ будет выполнено для всех $x\in[a,\,b]$, в том числе и для x_0. При фиксированном n частичная сумма ряда $S_n(x)$ является непрерывной на отрезке $[a,\,b]$ как сумма конечного числа непрерывных функций.

Поэтому для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, будет выполнено неравенство $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Тогда разность $|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, что доказывает непрерывность суммы ряда в точке x_0, а т.к. x_0 выбрано произвольно на отрезке $[a, b]$, то $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Другие свойства равномерно сходящихся рядов сформулируем без доказательства.

<u>Теорема (почленное интегрирование)</u>. Если функции $u_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) непрерывны на отрезке $[a, b]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то интеграл от суммы ряда $S(x)$ на отрезке $[a, b]$ представляется в виде суммы интегралов от членов этого ряда

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx,$$

т.е. $$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

Замечание. Интегрирование можно выполнить на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a, b]$.

<u>Пример</u>. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

<u>Решение</u>. Пусть S - искомая сумма, представим S в виде $S = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}}$. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1}$. На любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, этот ряд сходится равномерно,

т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом. Пусть $\sigma(x)$ – сумма этого ряда, тогда $S=\frac{1}{3}\sigma(\frac{1}{3})$. Применим к построенному функциональному ряду теорему о почленном интегрировании. Интегрирование выполним на отрезке $[0,x]$, полагая, что $x\in(-1,1)$

$$\int_0^x \sigma(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n\cdot x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Тогда $\sigma(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$. Искомая сумма $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

Теорема (почленное дифференцирование). Пусть функции $u_n(x)$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u_n'(x)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная суммы равна сумме ряда из производных $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$, т.е.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

Пример. Вычислить сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}$.

Решение. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, который сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим исходную сумму числового ряда S, а сумму функционального ряда $S(x)$. Тогда $S=S\left(\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом, Применим к данному ряду теорему о почленном дифференцировании

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Учитывая, что $S(0) = 0$, получим $S = -\ln(1-x)$. Искомая сумма

$S = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

Степенные ряды

<u>*Определение*</u>. Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$, которые с помощью замены $(x-x_0)$ на новую переменную сводятся к рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, изучением которых можно ограничиться. Выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда.

<u>*Теорема Абеля*</u>. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке x, такой что $|x| < |x_0|$.

*Доказательство***.** Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^{\,n}$ следует, что его общий член стремится к нулю, а, значит, ограничен, т.е. существует положительное число M такое, что $\left|a_n x_0^{\,n}\right| \le M$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$.

Возьмем произвольное x, для которого $|x| < |x_0|$ и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$. Оценим его общий член $\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^{\,n} \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = \left|a_n x_0^{\,n}\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \cdot q^n$, где $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Общий член рассматриваемого ряда меньше, чем соответствующие члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, степенной ряд сходится абсолютно в точке x. Теорема доказана.

Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Заметим, что любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$. Применим для нахождения его области сходимости признак Даламбера $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n}\right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, если $x \ne 0$. Значит, данный ряд сходится только в одной точке $x_0 = 0$.

Предположим, что для степенного ряда существуют отличные от нуля значения x, при которых он сходится. Если множество этих значений не ограничено, то согласно теореме Абеля ряд сходится всюду, причем абсолютно.

Пусть множество значений x, при которых степенной ряд сходится, ограничено, и положительное число R – точная верхняя грань этого множества. Если $|x| < R$, то найдется значение x_0 такое, что $|x| < |x_0| \le R$, при котором ряд сходится. Тогда согласно теореме Абеля ряд сходится абсолютно в точке x. Итак, степенной ряд сходится абсолютно в интервале $(-R,R)$ и расходится вне этого интервала. На концах интервала, т.е. при $x=\pm R$ может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.

<u>*Определение.*</u> Интервал $(-R,R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R – *радиусом сходимости*.

Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R=\infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x=0$, то $R=0$.

Замечание. Степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ сходится или в интервале (x_0-R, x_0+R) с центром в точке x_0, или на всей числовой оси, или только в точке $x=x_0$.

Замечание. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Радиус сходимости степенного ряда: $\boldsymbol{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$ и, соответственно, $\boldsymbol{R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}$,если эти пределы существуют (конечные или бесконечные).

<u>*Пример*</u>. *Н*айти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{2^n}x^n$.

<u>*Решение*</u>. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(n+1)x^n}\right|=\frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{|x|}{2}<1 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2.$$

$(-2,2)$ – интервал сходимости, $R=2$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала. Обозначая общий член ряда $u_n(x)$, вычислим его значения на концах интервала: $u_n(-2)=(-1)^n\cdot(n+1)$, $u_n(2)=n+1$.

При $x=\pm 2$ не выполняется необходимое условие сходимости, следовательно, на концах интервала ряд расходится.

<u>*Пример*</u>. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{3^n\cdot\ln n}$.

<u>*Решение*</u>. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\ln(n+1)}\cdot\frac{3^n\cdot\ln n}{(x+1)^n}\right|=\frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{|x+1|}{3}.$$

При вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}$ используется правило Лопиталя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{\ln(t+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}}\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t}=1\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=1.$$

Интервал сходимости определяется из неравенства

$$\frac{|x+1|}{3}<1\Leftrightarrow|x+1|<3\Leftrightarrow -3<x+1<3\Leftrightarrow -4<x<2.$$

$(-4,2)$ – интервал сходимости, $R=3$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала. При $x=-4$ получим положительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Покажем, что для любого номера $n=2,3,4,\ldots$ выполнено неравенство $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n}\Leftrightarrow\dfrac{\ln n}{n}<1$. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ и вычислим ее производную: $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$. Так как $f(2) = \dfrac{\ln 2}{2} < 1,\ f(3) = \dfrac{\ln 3}{3} < 1$, а при $x > e$ $f(x)$ убывает, то ее значения меньше 1 при всех $n = 2,3,4,\ldots$. Члены полученного ряда больше, чем соответствующие члены гармонического ряда, т.е. при $x = -4$ ряд расходится. При $x = 2$ получим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$, который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

__Пример__. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

__Решение__. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \text{ при всех } x.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда –
вся числовая ось.

__Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда)__. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство. Пусть $(-R, R)$ – интервал сходимости степенного ряда и $[a, b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий этому интервалу. Обозначим x_0 – максимальное из чисел $|a|, |b|$. Тогда для всех $x \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|x| \le |x_0|$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке x_0, т.к. $x_0 \in (-R, R)$. Кроме того, $\left|a_n x^n\right| \le \left|a_n {x_0}^n\right|$, Т.е. степенной ряд мажорируется на отрезке $[a, b]$ сходящимся положительным числовым рядом, а, значит, согласно теореме Вейерштрасса, сходится на этом отрезке равномерно. Теорема доказана.

Степенные ряды обладают свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Сумма степенного ряда непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, а, значит, непрерывна на всем интервале.

2. Интеграл от суммы степенного ряда $S(x)$ на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, равен сумме ряда, полученного из данного степенного ряда путем почленного интегрирования на том же отрезке

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n dx .$$

Если в качестве отрезка интегрирования взять отрезок $[0, x]$, где x принадлежит интервалу сходимости, то равенство приобретает вид

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n ,$$

Т.е. в результате почленного интегрирования степенного ряда на отрезке $[0, x]$ получается также степенной ряд. Пользуясь, например, признаком Даламбера, можно показать, что радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

3. При почленном дифференцировании степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получим также степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n$ с тем же радиусом сходимости. Это означает, что сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости, и производная суммы равна сумме ряда из производных.

Почленное дифференцирование можно применить повторно к ряду из производных первого порядка, второго и т.д. Значит, сумма степенного ряда имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков.

Замечание. При почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда интервал сходимости сохраняется. Сходимость на концах интервала следует проверять отдельно.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}$.

Решение. Данный ряд сходится на промежутке $(-1, 1]$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном дифференцировании:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\cdot x^{n}=\frac{1}{1+x}.$$

Полученный в результате почленного дифференцирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$. Учитывая, что $S(0)=0$, найдем $S(x)=\ln(1+x)$.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$.

Решение. Данный ряд сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном интегрировании:

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}=\frac{x}{1-x}.$$

Полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$. Сумма ряда $S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Ряд Тейлора

Частичными суммами степенных рядов являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. Вопрос о представлении функций степенными рядами имеет особое значение.

Предположим, что заданная функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков. Тогда согласно формуле Тейлора для всех значений x из этого интервала выполняется равенство

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

, где $R_n(x)$ остаточный член формулы Тейлора. Он записывается разными способами, например, в форме Лагранжа $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, где $x_1 \in (x_0, x)$.

При этом n можно выбрать сколь угодно большим, т.е. учитывать в этой формуле сколь угодно большие степени переменной $(x - x_0)$. Естественно возникает вопрос о возможности представления функции $f(x)$ в виде бесконечной суммы или в виде степенного ряда

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Такой ряд, независимо от того, сходится он или не сходится к функции $f(x)$ в некотором интервале, называется *рядом Тейлора* этой функции, а его коэффициенты – коэффициентами Тейлора. Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется *рядом Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Согласно формуле Тейлора разность между значениями функции $f(x)$ и частичной суммой ряда Тейлора с номером $(n+1)$ этой функции равна остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы при некотором значении x значение функции $f(x)$ совпадало с суммой ряда Тейлора этой функции необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора при этом значении x стремится к нулю с возрастанием n: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Теорема. Если функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков и все производные для всех x из этого интервала ограничены одним и тем же числом: $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, то ряд Тейлора этой функции сходится к самой функции на данном интервале.

Это утверждение применимо к таким элементарным функциям как e^x, $\sin x$, $\cos x$. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ дифференцируемы всюду бесконечное число раз, и все их производные ограничены по модулю единицей. Значит, эти функции можно разложить в ряды Тейлора на любом интервале с центром в любой точке.

Теорема (о единственности представления функции степенным рядом). Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$,то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Доказательство. Полагая $x = x_0$ в формуле $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, получим $f(x_0) = a_0$. Применим к данному степенному ряду теорему о почленном дифференцировании:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2},$$

. . . .

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k},$$

. . . .

Полагая в этих равенствах $x = x_0$, получим

$$f'(x_0) = a_1 \cdot 1,$$

$$f''(x_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1,$$

. . . . . .

$$f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

. . . .

Значит, для коэффициентов ряда справедливы формулы:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \ldots,$$

т.е. данный ряд является рядом Тейлора этой функции. Теорема доказана.

Замечание. Теорема единственности позволяет доказывать некоторые тождества. Для этого раскладывают некоторую функцию двумя способами в степенной ряд. В силу теоремы единственности коэффициенты в обоих рядах при одинаковых степенях x совпадают.

Разложение основных элементарных функций

Выпишем разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

Последнее разложение при $\alpha = -1$ принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Заменяя x на $(-x)$, приходим к стандартной формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Пример. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ в ряд Маклорена. Найти производную n-го порядка в точке $x_0 = 0$.

Решение. Воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $(2x)$:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

В силу теоремы единственности имеем $f^{(2n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot(2n)!=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}$, $f^{(2n+1)}(0)=0$.

Пример. Разложить функцию $f(x)=\ln(x^2+5x+6)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$, т.е. по степеням переменной $(x+1)$. Найти производную n-го порядка в точке $x_0=-1$.

Решение. Пользуясь свойствами логарифмической функции, выполним тождественные преобразования

$$y=\ln(x^2+5x+6)=\ln\big((x+2)(x+3)\big)=\ln(x+2)+\ln(x+3)=$$

$$=\ln\big(1+(x+1)\big)+\ln\big(2+(x+1)\big)=\ln 2+\ln\big(1+(x+1)\big)+\ln\left(1+\frac{x+1}{2}\right),$$

а затем применим табличное разложение функции $\ln(1+x)$, делая соответствующие замены

$$y=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x+1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)(x+1)^n .$$

Чтобы найти значения x, для которых справедлива полученная формула, решим систему неравенств

$$\begin{cases}-1<x+1\le 1\\ -1<\dfrac{x+1}{2}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -1<x+1\le 1 \Leftrightarrow -2<x\le 0 .$$

В силу теоремы единственности имеем $f^{(n)}(-1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\cdot n!$.

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=arctg(x)$. Найти производную n-го порядка в точке $x_0=0$.

<u>*Решение*</u>. Воспользуемся табличным разложением для представления степенным рядом производной этой функции

$$y' = (arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n \cdot x^{2n} + ... \ , \quad x \in (-1,1).$$

Тогда $arctg(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \ , \quad x \in [-1,1].$

Заметим, что производная представляется степенным рядом на интервале $(-1,1)$, а сама функция – на отрезке $[-1,1]$.

В силу теоремы единственности имеем $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot (2n+1)! = (-1)^{n+1} \cdot (2n)!, \quad f^{(2n)}(0) = 0.$

§3. Применение теории рядов

Рассмотрим различные примеры применения степенных рядов.

Приближенные вычисления значений функций

<u>*Пример*</u>. Вычислить $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 5 знаков после запятой.

<u>*Решение*</u>. Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + ... = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - ...$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}\cdot\frac{125}{125}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{(125)^2} + \frac{1}{75\cdot(125)^2} - ...\right).$$

Последнее выписанное слагаемое этой суммы меньше, чем 10^{-5}. Кроме того, полученный числовой ряд является знакочередующимся рядом Лейбница, поэтому ошибка при замене суммы ряда на частичную сумму не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда.

Значит, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда: $\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}(1 + 0{,}008 - 0{,}000064) = 1{,}25992$.

Приближенные вычисления значений определенных интегралов

Пример. Вычислить с точностью до 3 знаков после запятой
$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x} dx$.

Решение. Воспользуемся полученным разложением функции $arctg(x)$ в ряд Маклорена

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^5}{5^2} - \frac{x^7}{7^2} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3^2} + \frac{1}{2^5 \cdot 5^2} - \frac{1}{2^7 \cdot 7^2} + \ldots.$$

Получен знакочередующийся ряд Лейбница, последнее выписанное слагаемое меньше, чем 10^{-3}. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x} dx \approx 0{,}5 - 0{,}01389 + 0{,}00125 \approx 0{,}487.$$

Вычисление предела последовательности

Теория рядов используется в теории последовательностей.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{[(3n)!]} = 0$.

Решение. Составим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{[(3n)!]}$. Для изучения его сходимости применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{(n+1)}[(3n)!]}{[(3(n+1)!]\cdot n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3(3n+1)(n+1)(3n+2)}=e\cdot 0=0<1.$$

По признаку Даламбера ряд сходится и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(3n)!}=0.$$

Вычисление значения производной функции в точке

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции по теореме единственности. При этом $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда для нахождения значения n-ой производной функции в точке x_0 используется формула $f^{(n)}(x_0)=a_n\cdot n!$.

Пример. Найти производную n –го порядка для функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ при $x_0=0$, $n=6$ и $n=99$.

Решение. Разложим функцию $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$:

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sin x=\frac{1}{x}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+...$$

Коэффициент $a_6 = -\frac{1}{7!}$, где $f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7!}6! = -\frac{1}{7}$. Коэффициенты при нечетных степенях x в данном разложении равны нулю, в частности $a_{99} = 0$ и, тогда $f^{(99)}(0) = 0$.

Применение теории рядов к решению линейных дифференциальных уравнений

Одним из методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является применение теории рядов. Данный метод использует известное утверждение из теории дифференциальных уравнений.

Теорема. Если все коэффициенты и правая часть линейного дифференциального уравнения *n-го* порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

разлагаются в степенные ряды в некоторой окрестности точки x_0, то решение $y(x)$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям $y(x_0) = A_0$, $y'(x_0) = A_1$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$, *также разлагается в степенной ряд в указанной окрестности.*

Пример. *Р*ешить задачу Коши $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$.

Решение. Подставим в уравнение $y' = y^2 + x^3$ начальные условия. Тогда $y'(0) = y^2(0) = \frac{1}{4}$. Найдем вторую производную, применяя дифференцирование неявной функции $y'' = 2yy' + 3x^2$. Тогда $y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Аналогично,

$$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x,$$

$$y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)\cdot y''(0) = 2\frac{1}{4^2} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8},$$

$$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 6 = 6y'y'' + 2yy''' + 6,$$

$$y^{(4)}(0) = 6y'(0)\cdot y''(0) + 2y(0)\cdot y'''(0) + 6 = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + 6 = \frac{6}{16} + \frac{6}{16} + 6 =$$

$$= \frac{12}{16} + 6 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$$ и т.д.

Поскольку решение уравнения ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots,$$

то, подставляя найденные коэффициенты, получим ответ

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 + \frac{27}{4\cdot 4!}x^4 + \dots =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \dots.$$

Обратим внимание на то, что исходное дифференциальное уравнение не решается в квадратурах. В примере приведен один из двух методов решения задачи Коши с помощью теории рядов.

§4. Ряды Фурье

При решении многих технических задач приходится иметь дело с периодическими процессами, для описания которых требуются периодические функции. Простейшей периодической функцией периода 2π является функция $\sin(x+\alpha)$. При сложении периодических функций $\sin(x+\alpha_1)$, $\sin(2x+\alpha_2)$, … , $\sin(nx+\alpha_n)$, периоды которых равны соответственно $2\pi, \pi, \ldots, \frac{2\pi}{n}$, получим периодическую функцию с периодом 2π. Естественно возникает обратный вопрос: можно ли заданную периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π представить в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx+\alpha_n)$:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\alpha_n) \ ?$$

Постоянное слагаемое A_0 можно считать периодической функцией с любым периодом, в том числе и с периодом 2π.

В механике функция $\sin(nx+\alpha_n)$ описывает простейшее гармоническое колебательное движение. Представление периодической функции $f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций можно рассматривать как разложение сложного колебания на отдельные гармонические колебания. Функции вида $\sin(nx+\alpha_n)$, входящие в состав разложения периодической функции $f(x)$, называются гармоническими составляющими этой функции или просто гармониками. Пользуясь тригонометрическим тождеством $\sin(nx+\alpha_n) = \sin\alpha_n \cdot \cos nx + \cos\alpha_n \cdot \sin nx$, и обозначая $A_n \cdot \sin\alpha_n = a_n$, $A_n \cdot \cos\alpha_n = b_n$, разложение периодической функции $f(x)$ можно переписать в виде

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1}$$

Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π и является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$. Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу.

Предполагая, что $f(x)$ представляется в виде суммы простейших тригонометрических функций, найдем коэффициенты ряда (1). С этой целью проинтегрируем обе части равенства (1) на отрезке $[-\pi, \pi]$, что оправдано, например, в случае равномерной сходимости на этом отрезке функционального ряда, стоящего в правой части равенства (1). Воспользуемся тем, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = \left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx = -\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = A_0 \cdot 2\pi$, откуда $A_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Для вычисления коэффициентов a_n умножим обе части равенства (1) на $\cos nx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi, \pi]$. Пользуясь тем, что

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(nx)dx = 0$, если $k \neq n$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cdot\cos(nx)dx = 0$, для любых k и n, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2}dx = \pi$, если $n \neq 0$, получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \pi \cdot a_n,$$

откуда $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, $\quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Аналогично $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, $\quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Чтобы формулы для коэффициентов выглядели единообразно, обозначим: $a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Итак, для любой функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, можно вычислить коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad (n = 0,1,2,3,...),$$

(2)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad (n = 1,2,3,...),$$

которые называются *коэффициентами Фурье* этой функции, и поставить в соответствие этой функции ряд

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{3}$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье* этой функции.

Определение. Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots ,$$

на основе которой построен тригонометрический ряд Фурье, называется *основной тригонометрической* системой функций.

Эта система на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает свойством ортогональности: интеграл от произведения любых двух функций этой системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

Сходимость ряда Фурье

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поставим этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье. Предположим теперь, что функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства. В формулировке теоремы используем выражения $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ для обозначения односторонних пределов функции $f(x)$ при условии, что x стремится к x_0 слева и справа соответственно.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям.

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi; \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна.

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$ во всех точках разрыва функции.

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)\right)$.

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-дифференцируема. Точнее, в этом случае тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках прямой $(-\infty; +\infty)$, в которых $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$ во всех точках разрыва функции.

<u>*Пример*</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную следующим образом $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$ Обосновать сходимость ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.

<u>*Решение.*</u> Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi \cdot dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)dx\right) = \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi \cdot \cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cdot\cos(nx)dx\right) = \\ = \frac{1}{\pi n^2}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{1}{\pi n^2}(1 - (-1)^n).$$

Если $n = 2k$ - четное число, то $a_n = a_{2k} = 0$.

Если $n = 2k+1$ - нечетное число, то $a_n = a_{2k+1} = \dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \pi \cdot \sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cdot\sin(nx)dx\right) = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид

$$f(x) \to S(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) - \\ -\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right).$$

Поскольку данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi, \pi]$, то согласно теореме Дирихле для всех $x \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство $f(x) = S(x)$. Например, полагая $x = 0$, получим

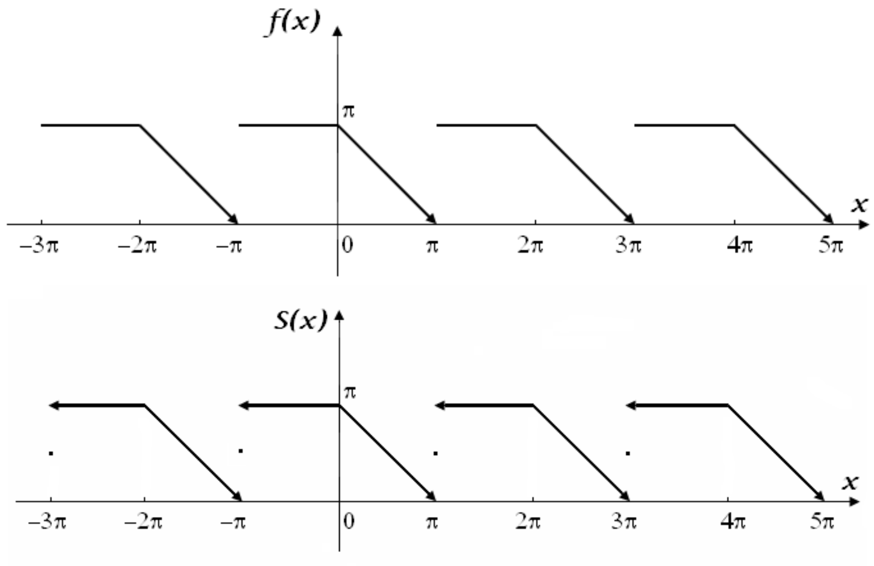
$$\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$ или

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье имеет следующее значение:

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big) = \frac{1}{2}\pi.$$

На рисунке показаны графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.



Сходимость в среднем ряда Фурье. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и ставится задача о наилучшем приближении этой функции с помощью другой функции $g(x)$ из определенного класса функций, определенных на этом же отрезке. Если требуется обеспечить близость функций во всех точках отрезка, то в качестве критерия близости рассматривается величина, равная $\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$, и функция $g(x)$ выбирается так, чтобы эта величина принимала наименьшее возможное значение. В этом случае обеспечивается равномерная на всем отрезке близость функций.

Если требуется обеспечить близость функций на отрезке в среднем, то в качестве критерия близости рассматривают величину, равную

$$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx .$$

Для достижения наилучшего приближения в среднем требуется минимизировать эту величину.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда согласно теореме Дирихле тригонометрический ряд Фурье этой функции во всех точках непрерывности сходится к этой функции. Можно показать, что величина $\delta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx$, характеризующая отклонение в среднем частичной суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье от кусочно-дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$.

Это означает, что тригонометрический ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ к своей сумме, а коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенству

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx ,$$

которое называется *равенством Парсеваля*.

Равенство Парсеваля является аналогом теоремы Пифагора в бесконечно-мерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$. Действительно, если считать, что квадрат «длины функции» в этом пространстве равен $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, что основная тригонометрическая система функций является базисом этого пространства, а ряд Фурье – разложением функции по этому базису, то согласно равенству Парсеваля квадрат «длины функции» равен сумме квадратов ее координат.

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках этого отрезка к функции $f(x)$, причем равномерно.

Представление рядом Фурье функции произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$, или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной $x = t\dfrac{l}{\pi}$, получим $f(x) = f\left(t\dfrac{l}{\pi}\right) = g(t)$.

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле. Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$ и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l} \right),$$

(4)

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi n x}{l} dx, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...),$$

(5)

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi n x}{l} dx, \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$:

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0) \big).$$

Равенство Парсеваля принимает вид $\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f^2(x) dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2})$.

Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Легко убедиться в том, что если кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной, то

$$\int_{-l}^{l} f(x) dx = \int_{-l}^{0} f(x) dx + \int_{0}^{l} f(x) dx = 2\int_{0}^{l} f(x) dx.$$

Действительно, сделав замену $t = -x$, вычислим

$$\int_{-l}^{0} f(x) dx = -\int_{l}^{0} f(-t) dt = \int_{0}^{l} f(t) dt = \int_{0}^{l} f(x) dx.$$

Аналогично устанавливается, что в случае нечетной функции $f(x)$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(t)dt = 0 .$$

Предположим теперь, что кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной. Тогда произведение $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ также является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ - нечетной. Вычислим коэффициенты Фурье четной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,...).$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье *четной* функции содержит только косинусы: $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}$,

а равенство Парсеваля приобретает вид $\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$.

Если функция $f(x)$ является *нечетной*, то произведение $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ также является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ - четной. Вычислим коэффициенты Фурье нечетной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,...).$$

Тригонометрический ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы: $f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$,

а равенство Парсеваля приобретает вид $\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\ 2}$.

Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Желая получить разложение этой функции в ряд Фурье, доопределим ее на промежутке $[-l, 0)$ произвольным образом, сохраняя лишь требование кусочной дифференцируемости. Это дает возможность получать различные разложения одной и той же функции в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$.

Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим четную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только косинусы.

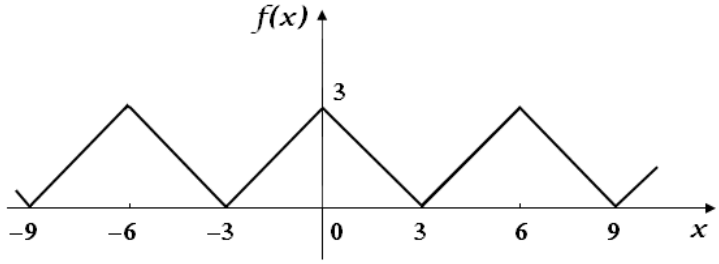
Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим нечетную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только синусы.

Пример. Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0, 3]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам. Обосновать сходимость каждого ряда Фурье. Нарисовать графики суммы для каждого ряда Фурье.

Решение.

1) Разложение по косинусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-3, 0)$ четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.



Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)dx = 3, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 + \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \sin\frac{n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 = \frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) = \frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \textit{если } n = 2k - \textit{четное число},\ k = 1,2,3,\dots, \\ \dfrac{12}{(2k+1)^2\pi^2}, & \textit{если } n = 2k+1 - \textit{нечетное число},\ k = 0,1,2,3,\dots. \end{cases}$$

Так как рассматриваемая функция является непрерывной всюду, то сумма ее тригонометрического ряда Фурье равна данной функции при всех x $f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{12}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi(2k+1)x}{3}}{(2k+1)^2}$.

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получим

$$3 = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{или} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Выпишем для этого разложения равенство Парсеваля. С этой целью вычислим интеграл

$$\frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)^2\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{(x-3)^3}{3}\bigg|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot 27 = 6\,.$$

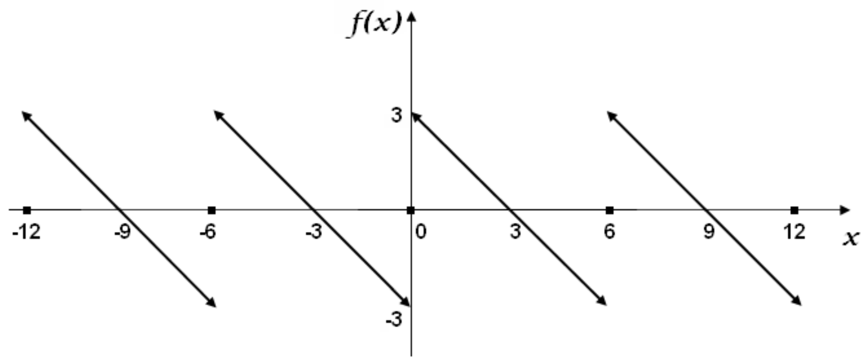
Равенство Парсеваля принимает вид

$$6 = \frac{9}{2} + \frac{144}{\pi^4}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\,, \qquad \text{откуда} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Итак, с помощью разложений функций в тригонометрические ряды Фурье, можно получать значения сумм некоторых числовых рядов.

2) Разложение по синусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-3,\,0)$ нечетным образом, изменим значение функции при $x=0$, полагая $f(0)=0$ и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.



Согласно теореме Дирихле сумма тригонометрического ряда Фурье такой функции будет равна функции при всех x. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3 - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{n\pi} - \frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3\right) = \frac{6}{n\pi}, \quad n = 1,2,3,\dots\ .$$

$f(x)=\frac{6}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{n}$. Полагая в этой формуле $x=\frac{3}{2}$, получим

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{n\pi}{2}=\sin k\pi=0$, если $n=2k$ - четное число и что $\sin\frac{n\pi}{2}=\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=(-1)^k$, если $n=2k+1$ - нечетное число, перепишем полученный результат в виде: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Содержание

§1. Комплексные числа и действия над ними

1.1 Алгебраическая форма комплексного числа

Определение 1.1. *Комплексным числом* z *называется выражение вида*

$$z=x+iy,$$

где x *и* y *– действительные числа,* i *– мнимая единица, определяемая условием* $i^2=-1$.

Числа x *и* y *называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа* z *и обозначаются* $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Такое представление комплексного числа z называется алгебраической формой комплексного числа.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x + iy$.

Определение 1.2. *Комплексные числа* $\boldsymbol{z_1 = x_1 + iy_1}$ *и* $\boldsymbol{z_2 = x_2 + iy_2}$ *считаются равными тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{x_1 = x_2}$, $\boldsymbol{y_1 = y_2}$.

Пример 1.1.

Решить уравнение $(3 + 2i)x + (2 - i)y = -1 + 4i$.

Решение. Выделим в левой части уравнения действительную и мнимую части:

$$(3x + 2y) + (2x - y)i = -1 + 4i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x = 1$, $y = -2$.

1.2 Геометрическое представление комплексного числа

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости xOy точкой M с координатами (x, y), либо вектором, начало которого находится в точ-

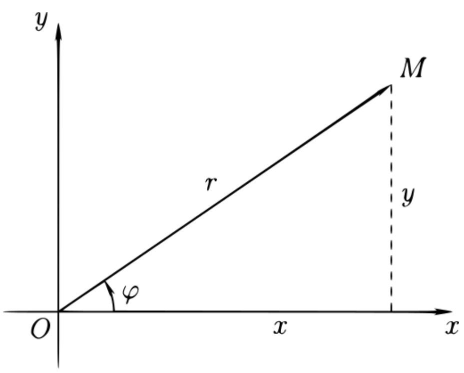


Рис. 1

ке $O(0,0)$, а конец в точке $M(x, y)$ (см. рис.1).

Если $y = 0$, то $z = x + i \cdot 0 = x$, то есть получаем обычное действительное, расположенное на оси OX, число. Если $x = 0$, то $z = iy$. Такие числа называются чисто мнимыми. Они изображаются точками на оси OY.

Определение 1.3. *Длина вектора* $\boldsymbol{z(\overline{OM})}$ *называется модулем комплексного числа и обозначается*

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.1)$$

Определение 1.4. *Угол образованный вектором* $\overrightarrow{OM}$ *с осью* Ox, *называется аргументом комплексного числа* z *и обозначается* $Arg\ z$ *:*

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

где $\varphi = arg\ z$ - *это главное значение* $Arg\ z$, *определяемое условиями*

$-\pi < \varphi \leq \pi$.

В зависимости от положения точки на комплексной плоскости,

аргумент комплексного числа можно находить, используя соотношения

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}. \qquad (1.2)$$

Отметим, что аргумент числа $z = 0$ не определен.

<u>Пример 1.2.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Решение. Модуль комплексного числа вычислим по формуле (1.1)

$$|z| = r = \left|-1 + \sqrt{3}i\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Для нахождения аргумента определим положение числа на комплексной плоскости: $z = -1 + \sqrt{3}i$ лежит в II четверти. Используя формулы (1.2)

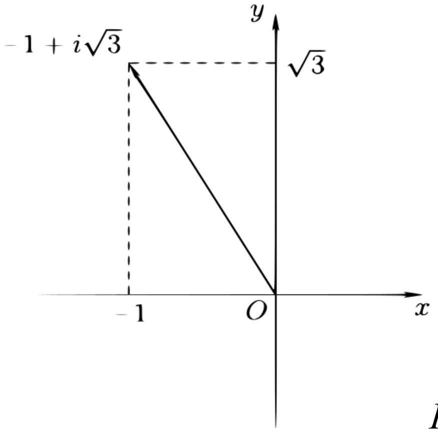


Рис. 2

найдем (см. рис. 2) $\varphi = argz = \frac{2\pi}{3}$.

Отметим, что

$$Arg\, z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

<u>Пример 1.3.</u>

Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = -5i$.

Решение. Число $z = -5i$ находится на мнимой оси: $x = 0$, $y = -5 < 0$.

Модуль z по формуле (1.1) $|z| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$.

$arg\, z = -\frac{\pi}{2}$ из (1.2), при этом $Arg\, z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

1.3 Действия над комплексными числами (сложение, вычитание, умножение и деление)

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

Определение 1.5. *Суммой* $\mathbf{z_1 + z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Определение 1.6. *Разностью* $\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}$ *комплексных чисел* $\mathbf{z_1}$ *и* $\mathbf{z_2}$ *называется комплексное число*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Определение 1.7. *Произведением* $z_1 z_2$ *комплексных чисел* z_1 *и* z_2 *называется комплексное число*

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Определение 1.8. *Частным* $\frac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$ *от деления комплексного числа* $\mathbf{z_1}$ *на комплексное число* $\mathbf{z_2} \neq \mathbf{0}$ *называется такое комплексное число* $\mathbf{z}$*, которое удовлетворяет уравнению* $\mathbf{z z_2} = \mathbf{z_1}$.

Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.4.

Вычислить $(3 - i)(2 + 5i)$.

Решение. Раскрывая скобки и учитывая $i^2 = -1$, получим

$$(3 - i)(2 + 5i) = 6 + 15i - 2i - 5i^2 = 6 + 5 + 13i = 11 + 13i.$$

Пример 1.5.

Вычислить $\frac{-2-3i}{1+4i}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю $1 - 4i$.

$$\frac{-2 - 3i}{1 + 4i} \cdot \frac{1 - 4i}{1 - 4i} = \frac{-2 - 12 - 3i + 8i}{1 + 16} = \frac{-14 + 5i}{17} = -\frac{14}{17} + \frac{5}{17} i.$$

Пример 1.6.

Вычислить i^{27}.

Решение. Поскольку $i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i, i^4 = 1$, и т. д., имеем $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$.

1.4 Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z = x + iy$ $(z \neq 0)$ можно записать в тригонометрической форме (см. рис. 1)

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi), \qquad (1.3)$$

где $r = |z|, \varphi -$ аргумент z.

<u>Пример 1.7.</u>

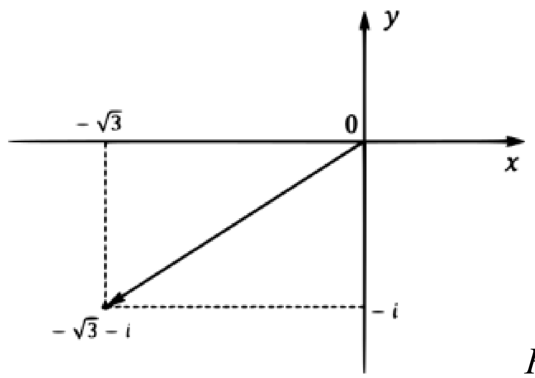
Записать в тригонометрической форме $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение. Модуль z найдем по формуле (1.1)

$$|z| = r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2.$$

Для нахождения аргумента определим положение z на комплексной плоскости: z лежит в III четверти (см. рис.3), тогда по (1.2)

$$\varphi = arg\, z = -\frac{5\pi}{6}.$$



Р

ис. 3

Подставляя значения модуля и аргумента в формулу (1.3), получим

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left[cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

1.5 Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 даны в тригонометрической форме
$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$.

1. **Произведение** $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. **Частное двух комплексных** чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

3. **Возведение** комплексного числа $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ **в натуральную степень** $\boldsymbol{n}$ производится по формуле

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + isin(n\varphi)), \tag{1.4}$$

Часто формулу (1.4) также называют формулой Муавра.

4. **Корень *n-й* степени из комплексного числа** $z \neq 0$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{1.5}$$

где $\varphi = argz, k = 0,1,2, \dots, n-1$.

<u>Пример 1.8.</u>

Вычислить $(2-2i)^{10}$.

Решение. Представим число $z = 2 - 2i$ в тригонометрической форме (1.3):

$2-2i=2\sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$

Применяя формулу (1.4), получим

$$(2-2i)^{10}=\left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right)+isin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=2^{15}(cos\left(\frac{5\pi}{2}\right)-isin\left(\frac{5\pi}{2}\right))=-2^{15}\cdot i.$$

<u>Пример 1.9.</u>

Вычислить $\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Представим число $z=-16$ в тригонометрической форме. Число лежит на действительной оси: $x<0$, $y=0$.

Модуль $|-16|=\sqrt{(-16)^2+0^2}=16$, аргумент $\varphi=\pi$.

По формуле (1.5)

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right)=$$
$$=2\left(cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+isin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k=0,1,2,3.$$

Полагая последовательно $k=0,1,2,3$, выпишем все корни

$$k=0: z_0=2\left(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$k=1: z_1=2\left(cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$k=2: z_2=2\left(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right),$$

$$k=3: z_3=2\left(cos\frac{7\pi}{4}+isin\frac{7\pi}{4}\right).$$

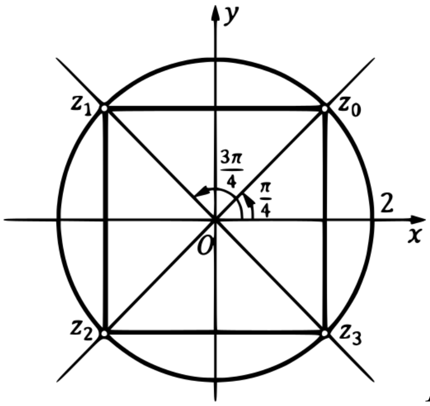


Рис.4

На плоскости корни располагаются на окружности радиуса 2 в вершинах правильного четырехугольника, вписанного в окружность радиуса $R = 2$ с центром в начале координат (см. рис. 4)

Пример 1.10.

Решить уравнение $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Обозначим $t = z^2$. Уравнение примет вид $t^2 - 2t + 4 = 0$. Корни этого уравнения $t_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $t_2 = 1 - \sqrt{3}i$, откуда $z_{1,2} = \sqrt{t_1}$, $z_{3,4} = \sqrt{t_2}$.

Пусть $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$. Находим модуль и аргумент комплексного числа $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $arg(1 + \sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3}$. Далее по формуле (1.5) получаем

$$z_{1,2} = \sqrt{1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + isin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right), \qquad k = 0,1.$$

Откуда $\quad z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + isin\frac{7\pi}{6}\right)$

По аналогии находим $z = \sqrt{1 - \sqrt{3}i}$, т.е. $z_3 = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $z_4 = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

Все корни находятся на окружности радиуса $R = \sqrt{2}$ (см. рис.5).

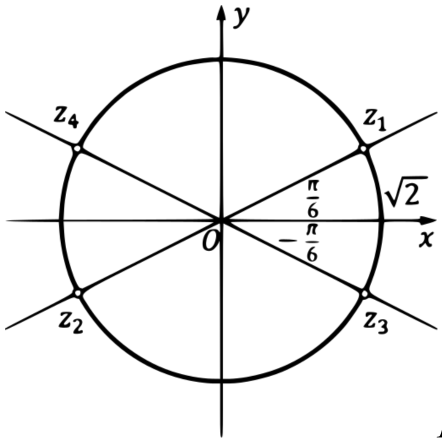


Рис. 5

1.6 Показательная форма записи комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$$

перепишем комплексное число в виде

$$z = r(cos\varphi + isin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|$, $\varphi -$ аргумент z.

Отметим, что

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Пример 1.11. Записать комплексное число $z = -3 - 3i$ в тригонометрической и показательной форме.

Решение. Число z находится в III четверти. Найдем модуль и аргумент

$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \varphi = arg\,z = -\frac{3\pi}{4}.$$

Тригонометрическая форма записи z

$$z = 3\sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

Показательная форма записи $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}$.

1.7 Изображение множеств на комплексной плоскости

Изобразить на комплексной плоскости линии и области, заданные уравнениями и неравенствами.

Пример 1.12. Изобразить $\operatorname{Re} z \leq 3$.

Решение. $\operatorname{Re} z = x$, тогда неравенство можно переписать так: $x \leq 3$. На плоскости xOy это определяет полуплоскость левее прямой $x = 3$

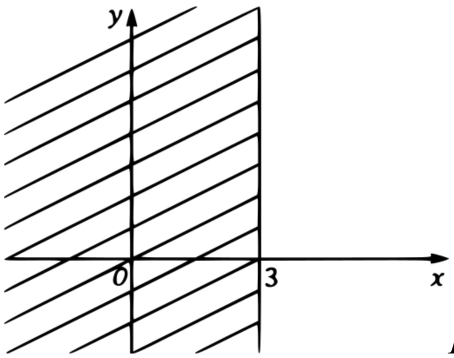


Рис. 6

(см. рис. 6).

Пример 1.13. Изобразить $|z| = 4$.

Решение. По определению, $|z|$ – это расстояние от начала координат до точки z, т.е. $|z| = 4$ – это геометрическое множество точек, равноудаленных от начала координат. Таким геометрическим местом является окружность с центром в начале координат радиуса $R = 4$.

Также можно вывести уравнение кривой алгебраическим способом. Из (1.1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, т. е. уравнение переписывается в виде $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$, или $x^2 + y^2 = 4^2$ – это и есть уравнение окружности с центром в точке O и $R = 4$.

Пример 1.14. Изобразить $1 < |z - 1 + i| \leq 2$.

Решение. $|z-1+i| = |z-(1-i)| \le 2$

Это множество точек z, расстояние которых от точки $1-i$ не больше 2, то есть круг с центром в $1-i$ радиуса 2. Множество точек z таких, что

$1 < |z-(1-i)|$ представляет собой внешность круга радиуса 1 с центром в точке $1-i$. Таким образом, исходное множество – кольцо с центром в точке $1-i$ (см. рис. 7).

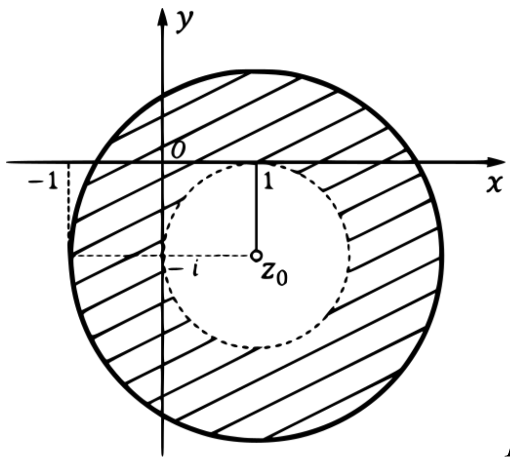


Рис. 7

<u>Пример 1.15.</u> Изобразить $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \ge 1.$

Решение: Пусть z не равно (-1). Умножим обе части неравенства на положительное число $|z+1|$, получим $|z-1| \ge |z+1|$.

Положим $z = x+iy$.

$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \ge \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

Возведем в квадрат:

$$(x-1)^2+y^2 \ge (x+1)^2+y^2.$$

Перенося в левую часть все слагаемые, получим $(x-1)^2-(x+1)^2 \ge 0$ или $-4x \ge 0$, или $x \le 0$ – это левая полуплоскость вместе с границей $x = 0$, причем выкалывается точка $z = -1$.

§ 2. Функции комплексного переменного

Сформулируем ряд основных определений, которые далее будут часто использоваться.

Определение 2.1. $\boldsymbol{\delta}$*-окрестностью точки* $\mathbf{z_0}$ *называется множество точек* $\mathbf{z}$*, лежащих внутри круга радиуса* $\boldsymbol{\delta}$ *с центром в точке* $\mathbf{z_0}$*, т. е. множество точек, удовлетворяющих неравенству* $|\mathbf{z}-\mathbf{z_0}|<\boldsymbol{\delta}$.

Определение 2.2. *Областью комплексной плоскости называется множество точек* $\boldsymbol{D}$*, обладающее следующими свойствами:*

1. *вместе с каждой точкой из* D *этому множеству принадлежит и некоторая окрестность этой точки, то есть некоторый круг без границы с центром в этой точке (свойство открытости);*
2. *две любые точки из* D *можно соединить ломаной, состоящей из точек* D *(свойство связности).*

Определение 2.3. *Область называется односвязной, если любую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.*

Определение 2.4. *Граничной точкой области* $\boldsymbol{D}$ *называют такую точку, которая сама не принадлежит* $\boldsymbol{D}$*, но в любой окрестности которой лежат точки этой области.*

Определение 2.5. *Совокупность граничных точек области* $\boldsymbol{D}$ *называют границей этой области Г(**D**).*

Определение 2.6. *Область* $\boldsymbol{D}$ *с присоединенной к ней границей Г(**D**) называется замкнутой областью и обозначается* $\overline{\boldsymbol{D}}$.

Определение 2.7. *Говорят, что в области* $\boldsymbol{D}$ *определена функция* $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{f}(\mathbf{z})$ *с множеством значений Е, если каждой точке* $\mathbf{z}\in\boldsymbol{D}$ *поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или целое множество (многозначная функция) значений* $\omega\in E$ **.**

Например, $\omega=|z|$ – однозначная функция, $\omega=\sqrt[n]{z}$ – n-значная функция, т.к. имеет n корней, $\omega=Arg\,z$ – бесконечнозначная функция, т.к. слагаемое $2\pi k$, входящее в $Arg\,z$, принимает бесконечное число значений при $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Пусть $z=x+iy$, тогда

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

где $u(x,y) = \mathrm{Re} f(z)$ – действительная часть функции, $v(x,y) = \mathrm{Im} f(z)$ – мнимая часть функции.

Пример 2.1. Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2 + i\bar{z}$.

Решение. Положим $z = x + iy$, тогда $\omega = (x+iy)^2 + i(x-iy) = x^2 + 2xyi - y^2 + ix + y = (x^2 - y^2 + y) + i(2xy + x)$.

Получаем

$u(x,y) = x^2 - y^2 + y$ – действительная часть функции,

$v(x,y) = 2xy + x$ – мнимая часть функции.

2.1 Элементарные функции комплексного переменного

Основные элементарные функции комплексного переменного определяются следующими формулами (здесь $z = x + iy$)

1. ***Дробно-рациональная функция***

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}.$$

В частности, рациональной функцией является многочлен $\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. ***Показательная функция*** e^z при $z=x+i\cdot y\in\mathbf{C}$ определяется равенством

$$e^z = e^x\cdot(\cos y + i\cdot\sin y).$$

В частности, при $z\in\mathbf{R}$ (т.е. при $y=0$) функция e^z совпадает с обычной экспонентой, а при $x=0$ получаем формулу Эйлера:

$$e^{i\cdot y} = \cos y + i\cdot\sin y.$$

Свойства показательной функции:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1, z_2 – комплексные числа,
в) $e^{z+2\pi ki} = e^z (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, т.е.

e^z – периодическая функция с периодом $2\pi i$.

3. ***Тригонометрические функции***

Из формулы Эйлера следует, что $\forall x \in \mathbf{R}$

$$\cos x = \frac{e^{i\cdot x} + e^{-i\cdot x}}{2}, \ \sin x = \frac{e^{i\cdot x} - e^{-i\cdot x}}{2i}.$$

По аналогии с этими равенствами введем функции комплексного переменного cosz и sinz $\forall z \in \mathbf{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}}{2i}. \qquad (2.1)$$

Функции $sinz$ и $cosz$ – периодические с периодом $T = 2\pi$. Справедливо основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Функции tgz и $ctgz$ определяются равенствами $tgz = \frac{sinz}{cosz}$, $ctgz = \frac{cosz}{sinz}$. Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все формулы тригонометрии.

4. ***Гиперболические функции***

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$
$$thz = \frac{shz}{chz}, \ cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Основное гиперболическое тождество $ch^2 z - sh^2 z = 1$.

5. *Связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями*

$$sinz = -ish(iz), cosz = ch(iz), tgz = -ith(iz),$$
$$ctgz = icth(iz), shz = -isin(iz), chz = \cos(iz),$$
$$thz = -itg(iz), cthz = ictg(iz).$$

6. ***Логарифмическая функция*** $\mathbf{Ln}\ \boldsymbol{z}$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\text{Ln}\, z = ln|z| + iArg\, z = ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.2)$$

Функция $\omega = \text{Ln}\, z$ является многозначной.

Главным значением $\text{Ln}\, \boldsymbol{z}$ *называется значение, получаемое при* $\boldsymbol{k = 0}$

$$lnz = ln|z| + iargz.$$

Свойства функции $Ln\, z$:

a) $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,

b) $\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

7. ***Общая показательная функция*** определяется равенством

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}, \quad (2.3)$$

где a – любое комплексное число, $a \neq 0$.

8. ***Общая степенная функция*** $w = z^a$, где a – любое комплексное число, $z \neq 0$

$$z^a = e^{a\mathrm{Ln}z}. \quad (2.4)$$

Пример 2.2. Вычислить $sin(3-i)$.

Решение. Используя формулы (2.1) получаем

$$sin(3-i) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(3-i)} - e^{-i(3-i)}\right] = -\frac{i}{2}\left[e^{1+3i} - e^{-1-3i}\right] =$$

$$= -\frac{i}{2}[e(cos3 + isin3) - e^{-1}(cos3 - isin3)] =$$

$$= -i\left[cos3\left(\frac{e-e^{-1}}{2}\right) + isin3\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)\right] =$$

$$= sin3ch1 - icos3sh1.$$

Пример 2.3. Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$.

Решение. Из формулы (2.2) получаем

$$\mathrm{Ln}(-1) = ln|-1| + i(arg(-1) + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k) =$$

$$= (2k+1)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример 2.4. Вычислить i^{2i}.

Решение. Положим $a = i, z = 2i$ и воспользуемся формулой (2.4)

$$i^{2i} = e^{2i\mathrm{Ln}i}.$$

Вычислим отдельно $\mathrm{Ln}(i)$. Используя формулу (2.2), получим:

$$\mathrm{Ln}(i) = ln|i| + i(arg i + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$$|i| = \sqrt{0 + 1^2} = 1, ln|i| = ln1 = 0, arg i = \frac{\pi}{2},$$

$$i^{2i} = e^{2i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} = e^{-\pi-4\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пример 2.5. Решить уравнение $sinz = 3$, корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

Решение. Используя формулу (2.1), уравнение можно переписать в виде $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$ или $e^{2iz} - 6ie^{iz} - 1 = 0$ – это квадратное уравнение относительно e^{iz}. Его корни

$$e^{iz} = 3i \pm 2\sqrt{2}i = i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$$

Прологарифмируем полученное равенство

$$iz = \mathrm{Ln}\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) = ln\left|i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right| +$$
$$+i\left(arg\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) + 2\pi k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Вычислим $\left|i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right| = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $arg\left(i\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$, получим

$$iz = ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

отсюда вычислим

$$z = \frac{1}{i} ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right).$$

Получили две серии корней

$$z_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right), z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - iln\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Преобразуем z_2.

$$-ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = ln\frac{1}{3-2\sqrt{2}} = ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right),$$

поэтому

$$z_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + iln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Корни находятся на двух прямых, параллельных оси Ox и отстоящих от нее на расстояние $ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$ (см. рис. 8).

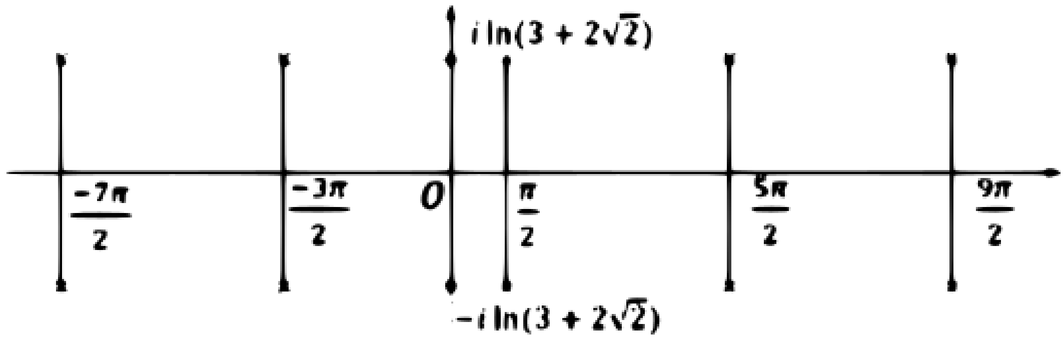


Рис. 8

2.2 Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть функция $f(z)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой точки z_0.

Определение 2.8. *Комплексное число A называется пределом однозначной функции $f(z)$ в точке z_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow$*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall z, \text{такого что } 0 < |z - z_0| < \delta, \Rightarrow$$

$|f(z) - A| < \varepsilon$. $\quad$ *z_0 и A – конечные точки комплексной плоскости.*

Определение 2.9. *Однозначная функция $f(z)$, заданная в области D, называется непрерывной в точке $z_0 \in D$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Функция $f(z)$, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы функция комплексной переменной*

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в точке $M_0(x_0, y_0)$ по совокупности переменных x и y.

Таким образом, функция w = $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в этой же точке. Поэтому все свойства непрерывных функций двух действительных переменных переносятся без изменений на функции комплексного переменного.

<u>Пример 2.6.</u> Вычислить предел функции $\lim\limits_{z\to -2i}\frac{z^2+iz+2}{z+2i}$.

Решение. Непосредственная подстановка в числитель и знаменатель предельного значения аргумента $z=-2i$ обращает их в нуль и приводит к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим числитель на множители, сократим на $(z+2i)$, получим

$$\lim_{z\to -2i}\frac{z^2+iz+2}{z+2i}=\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)(z-i)}{z+2i}=\lim_{z\to -2i}(z-i)=-3i.$$

2.3 Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Пусть однозначная функция $\omega=f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D.

Обозначим

$$\Delta\omega=f(z+\Delta z)-f(z),\qquad \Delta z=\Delta x+i\Delta y.$$

Определение 2.10. *Однозначная функция $\omega=f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z\in D$, если отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается $f'(z)$ или ω', т.е.*

$$\omega'=f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}.$$

Обычные правила дифференцирования функций действительного переменного остаются справедливыми для функций комплексного переменного.

Определение 2.11. *Однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если она дифференцируема в самой точке z_0 и в некоторой окрестности этой точки.*

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *была дифференцируема в точке* $z = x + iy$, *необходимо и достаточно, чтобы функции* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *были дифференцируемы в точке* (x, y) *и чтобы в этой точке имели место равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

называемые условиями Коши-Римана. При этом формулы для производной функции $f'(z)$ *имеют вид:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

<u>Пример 2.7</u>. Исследовать функцию $f(z) = z^2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставив вместо $z = x + iy$:

$$f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т. е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2, \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = 2xy.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y). Проверим выполнение теоремы 2.2.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \frac{\partial v}{\partial x} = 2y.$$

Условия Коши-Римана выполнены во всех точках (x, y), т.е. выполнены условия теоремы 2.2, следовательно, $f(z) = z^2$ аналитическая функция на всей комплексной плоскости.

<u>Пример 2.8.</u> Исследовать функцию $f(z) = 3\bar{z} + 2$ на аналитичность.

Решение. Выделим действительную и мнимую части функции, подставим вместо $\bar{z} = x - iy$

$$f(z) = 3(x - iy) + 2 = (3x + 2) - 3yi,$$

т.е.

$$\mathrm{Re}f(z) = u(x, y) = 3x + 2, \mathrm{Im}f(z) = v(x, y) = -3y.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы во всех точках (x, y), проверим выполнение условий теоремы 2.2

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$ - первое условие Коши-Римана не выполнено ни в одной точке комплексной плоскости. Значит, функция $\omega(z)=3\overline{z}+2$ нигде не дифференцируема, а следовательно, не является аналитической.

Свойства аналитических функций

Если $f_1(z), f_2(z)$ аналитические функции в области D, то

1) $f_1(z)\pm f_2(z)$, $f_1(z)\cdot f_2(z)$ – также аналитические функции в области D;

2) $\frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ - аналитическая функция во всех точках области D, где $f_2(z)\neq 0$.

При этом имеют место формулы

$$[f_1(z)\pm f_2(z)]'=f_1'(z)\pm f_2'(z),$$

$$[cf_1(z)]'=cf_1'(z),\ \left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]'=\frac{f_1'(z)f_2(z)-f_2'(z)f_1(z)}{f_2^2(z)},$$

$$[f_1(z)\cdot f_2(z)]'=f_1'(z)f_2(z)+f_1(z)f_2'(z).$$

§3. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D. Рассмотрим кусочно-гладкую ориентированную кривую L, лежащую в D, т.е. будем предполагать, что на L задано направление от начальной точки z_0 к конечной точке z.

Введем *определение интеграла от функции комплексного переменного.*

Разобьем кривую L произвольным образом на n элементарных час-

тей $\gamma_0, \gamma_1,\dots, \gamma_{n-1}$ точками $z_0, z_1,\dots, z_n=z$. Составим интегральную сумму $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k$, где $\xi_k \in \gamma_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k=0,1,\ldots,$ $n-1$. Предел интегральной суммы σ_n при $\lambda = \max_k |\Delta z_k| \to 0$, если он существует и конечен, называется интегралом от функции $f(z)$ по кривой (вдоль кривой) L :

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta z_k .$$

Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где $u(x,y)$, $v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y. Тогда можно показать, что интеграл от функции $f(z)$ равен сумме двух криволинейных интегралов, а именно

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy +$$
$$+i\int_L u(x,y)dy + v(x,y)dx.$$

Интеграл от функции комплексного переменного обладает следующими *свойствами.*

1. Свойство линейности.

$$\int_L [c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)]\,dz = c_1\int_L f_1(z)dz \pm c_2\int_L f_2(z)dz,$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

2. Свойство аддитивности.

$$\int_{L_1\bigcup L_2} f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1 \bigcup L_2$ – кривая, составленная из кривых L_1 и L_2,

3. $\quad \int_L f(z)dz = -\int_{L^-} f(z)dz,$

где L^- – кривая, совпадающая с L, но проходимая в противоположном направлении.

4. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, содержащей точки z_0 и z_1, то имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,|_{z_0}^{z_1},$$

где $\Phi(z)$ – какая-либо первообразная для функции $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ в области D.

5. Если кривая L задана параметрическими уравнениями

$x = x(t), y = y(t)$

начальная и конечная точки дуги L соответствуют значениям параметра $t = t_0, t = t_1$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f[z(t)]z'(t)dt,$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Пример 3.1. Вычислить интеграл $\int_L (2\bar{z} - i)\,dz$ по параболе $y = x^2$, соединяющей точки $z_1 = 0, z_2 = 1 + i$.

Решение. Перепишем подынтегральную функцию в виде $2\bar{z} - i = 2x - 2yi - i = 2x - i(2y + 1)$, т.е. $u(x, y) = 2x, v(x, y) = -(1 + 2y)$.

Используем для вычисления интеграла формулу $\int_L (2\bar{z} - i)\,dz = \int_L 2\,xdx + (1 + 2y)dy + i\int_L 2\,xdy - (1 + 2y)dx$.

Для параболы $y = x^2$ имеем $dy = 2xdx$ $(0 \le x \le 1)$. Тогда

$$\int_L (2\bar{z} - i)\,dz = \int_0^1 [2x + (1 + 2x^2)2x]\,dx +$$

$$+i\int_0^1 [2x \cdot 2x - (1 + 2x^2)]\,dx =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} + \frac{4x^4}{4}\right)|_0^1 + i\left(\frac{2x^3}{3} - x\right)|_0^1 =$$

$$= 3 + i\left(\frac{2}{3} - 1\right) = 3 - \frac{1}{3}i.$$

Пример 3.2. Вычислить интеграл $\int_i^{2i} (3z^2 + 1)\,dz$.

Решение. Подынтегральная функция аналитическая всюду (достаточно проверить все условия теоремы 2.2), можно применить формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_i^{2i} (3z^2+1)\,dz = (z^3+z)\,\Big|_i^{2i} = (2i)^3 + 2i - i^3 - i =$$

$$= -8i + 2i + i - i = -6i.$$

§ 4. Ряды с комплексными членами. Ряды Тейлора и Лорана

4.1 Числовые ряды с комплексными членами

Определение 4.1. Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1,\ 2,\ldots$, называется *сходящейся*, если сходятся соответствующие последовательности действительной части $\{x_n\}$ и мнимой части $\{y_n\}$.

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$, $n = 1,\ 2,\ldots$. Составленное из членов этой последовательности выражение $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots\ = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется *числовым рядом с комплексными членами*, z_n - общий член ряда.

Сумма $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Определение 4.2. Числовой ряд *с комплексными членами* называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Исследование ряда с комплексными членами сводится к исследованию двух вещественных рядов на основании следующего утверждения.

Сходимость ряда с комплексными членами

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ к сумме $S = A + iB$ равносильна сходимости двух вещественных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно к суммам A и B.

Определение 4.3. Ряд с комплексными членами называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} | z_n | = \sum_{n=1}^{\infty} | (x_n + iy_n) | = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n{}^2 + y_n{}^2} .$$

Теорема4.1. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам ряд с комплексными членами.

4.2 Степенные ряды с комплексными членами. Ряд Тейлора

Пусть дана последовательность функций комплексной переменной

$$u_1(z),\ u_2(z),\ \ldots,\ u_n(z),\ \ldots ,$$

определенных на некотором множестве D комплексной плоскости: $D \subset C$. Выражение вида

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

называется *функциональным* рядом с комплексными членами.

Определение 4.4. Множество значений переменной z, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Определение 4.5. Степенным рядом с комплексными членами называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Здесь z - комплексная переменная, c_n и z_0 - комплексные числа. При $z_0 = 0$ степенной ряд имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots.$$

Теорема 4.2. (теорема Абеля). Пусть степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

сходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$. Тогда этот ряд абсолютно сходится в круге $|z-z_0| < |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ расходится в некоторой точке $z_1 \neq z_0$, то этот ряд расходится в области $|z-z_0| > |z_1 - z_0| = R$, т.е. вне круга $|z-z_0| \leq |z_1 - z_0| = R$.

Следствие. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ существует число R, $0 \leq R \leq \infty$, называемое *радиусом сходимости* степенного ряда, такое, что внутри круга $|z-z_0| < R$ ряд сходится, а вне этого круга, т.е. в области $|z-z_0| > R$, ряд расходится.

Если R - радиус сходимости, то область $|z-z_0| < R$ называется *кругом сходимости* степенного ряда. В точках границы $|z-z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В этом случае требуется дополнительное исследование.

Теорема 4.3. *Функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z-z_0| < R$, представляется в нем единственным образом в виде сходящегося к ней степенного ряда – ряда Тейлора*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n,$$

коэффициенты которого c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Здесь L – окружность с центром z_0, целиком лежащая в круге сходимости $|z-z_0| < R$.

Предполагается, что окружность проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ R_{\text{сх}} = \infty, \tag{4.1}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{4.2}$$
$R_{\text{сх}} = \infty$,

$$cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{4.3}$$
$R_{\text{сх}} = \infty$,

$$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n},\ R_{\text{сх}} = 1,$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \ldots,$$
$R_{\text{сх}} = 1$

при $\alpha = -1$,
$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \tag{4.4}$$
$R_{\text{сх}} = 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,\ R_{\text{сх}} = 1.$$

<u>Пример 4.1.</u> Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{7-2z}$ по степеням $(z-2)$.

Решение. Введем новую переменную $t = z - 2$, выразим $z = t + 2$ и подставим в функцию $f(z)$

$$f(t) = \frac{1}{7 - 2(t+2)} = \frac{1}{3 - 2t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t}$$

Воспользуемся формулой (4.4), подставляя вместо $z \to \frac{2}{3}t$:

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}t} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}t + \left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \ldots + \left(\frac{2}{3}t\right)^n + \ldots\right).$$

Сделаем обратную замену

$$f(z)=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}(z-2)+\frac{2^2}{3^2}(z-2)^2+\ldots+\frac{2^n}{3^n}(z-2)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд сходится при условии $\left|\frac{2}{3}(z-2)\right|<1$, или $|z-2|<\frac{3}{2}$.

4.3 Ряд Лорана

Определение 4.6. *Рядом Лорана называется ряд вида*

$$..+\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+$$
$$+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},$$

где z_0, c_n – комплексные постоянные, z – комплексная переменная.

Определение 4.7. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots$$

называется главной частью ряда Лорана.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

называется правильной частью ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots \text{ и}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

Областью сходимости первого из этих рядов является внешность круга $|z-z_0|>r$. Областью сходимости второго ряда является внутренность круга $|z-z_0|<R$.

Если $r<R$, то ряд Лорана сходится в кольце $r<|z-z_0|<R$.

Здесь $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Теорема 4.4. *Функция $f(z)$ однозначная и аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$ (не исключаются случаи $r = 0$ и $R = +\infty$) представляется в этом кольце единственным образом в виде ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Здесь L – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащей внутри данного кольца.

4.4 Примеры разложений функции в ряд Лорана

<u>Пример 4.2.</u> Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = (z-3)^4 cos\frac{1}{z-3}$ по степеням *(z-3).*

Решение. Сделаем замену $t = \frac{1}{z-3}$, получим $f(t) = \frac{1}{t^4} cos t$. Используя разложение (4.3), получим

$$cos\frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!\,(z-3)^4} - \frac{1}{6!\,(z-3)^6} + \dots,$$

тогда

$$f(z) = (z-3)^4 \left(1 - \frac{1}{2!\,(z-3)^2} + \frac{1}{4!(z-3)^4} - \frac{1}{6!(z-3)^6} + \right.$$

$$\left. + \dots \right) = (z-3)^4 - \frac{(z-3)^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,(z-3)^2} + \dots$$

Это разложение справедливо для любой точки $z \neq 3$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z = 3$. что можно записать так: $0 < |z - 3| < +\infty$. Здесь $r = 0$, $R = +\infty$. В указанной области $f(z)$ – аналитическая.

Пример 4.3. Получить все разложения функции $f(z) = \frac{2z+3}{z^2+3z+2}$

в ряд по степеням z.

Решение. Приравняем знаменатель дроби к нулю $z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z + 1) = 0$, отсюда $z_1 = -2$, $z_2 = -1$. Изобразим на комплексной плоскости возможные области. Для этого проведем окружности с центром в $z_0 = 0$ через точки $z_1 = -2$ и $z_2 = -1$. Получим три «кольца» с центром в точке $z_0 = 0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

1) круг $|z| < 1$,

2) кольцо $1 < |z| < 2$,

3) $2 < |z| < +\infty$ – внешность круга $|z| \leq 2$ (см. рис. 9)

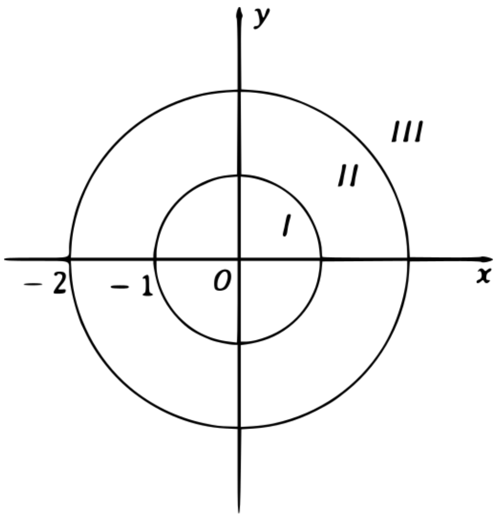


Рис. 9

Найдем ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждой из этих областей.

Для этого представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}.$$

A и B нашли методом неопределенных коэффициентов.

1) Рассмотрим круг $|z|<1$. Преобразуем $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z)=(1-z+z^2-z^3+\ldots)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}-\ldots\right)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}z+\frac{5}{4}z^2-\frac{9}{8}z^3+\ldots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$, т.к. в этой области функция является аналитической. При этом ряд для функции $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots$ сходится при $|z|<1$,

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots$$

сходится при $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $|z|<2$, т.е. внутри круга $|z|<1$ оба ряда сходятся.

2) Рассмотрим кольцо $1<|z|<2$. Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остается сходящимся в этом кольце, т.е. $|z|<2$, а ряд для функции $\frac{1}{1+z}$ расходится при $|z|>1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}.$$

Применяя формулу (4.4), получаем

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}-\frac{z^3}{2^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^2}{16}+\ldots+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\ldots$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$ и при $|z|<2$.

3) Рассмотрим $|z|>2$. Ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z|>2$ расходится, а ряд для функции $\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$ сходится, если $|z|>2$, то условие $|z|>1$ выполняется. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Используя формулу (4.4), получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)+\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{3}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{9}{z^3}\right)=\frac{2}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{5}{z^3}-\frac{9}{z^4}+\ldots$$

Таким образом, в разных областях функция $f(z)$ представима разными рядами.

<u>Пример 4.4.</u> Разложить функцию $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}.$$

Введем новую переменную $z-1=t$, т.е. $z=t+1$ и перепишем функцию $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{t+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{t}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$. Используя разложение (4.4), получим

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{z-1}{3}+\frac{(z-1)^2}{9}-\frac{(z-1)^3}{27}+\dots\right]$$

Область сходимости этого ряда $\left|\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$. Таким образом, разложение в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<3$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{3}-\frac{z-1}{9}+\frac{(z-1)^2}{27}-\frac{(z-1)^3}{81}+\dots$$

Слагаемое $\frac{1}{z-1}$ является степенью $(z-1)^{-1}$ и поэтому не требует дальнейшего разложения. Оно образует *главную часть ряда Лорана*.

§ 5. Теория вычетов функций

5.1 Нули аналитической функции

Определение 5.1. *Точка z_0 называется нулем n-го порядка аналитической в окрестности z_0 функции $f(z)$, если*

$$f(z_0)=0, f'(z_0)=0, \dots, f^{(n-1)}(z_0)=0,$$
$$f^{(n)}(z_0)\neq 0.$$

Если $n=1$, то точка z_0 называется простым нулем.

Теорема 5.1. *Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

где $\varphi(z)$ аналитическая в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример 5.1. Найти нули функции $f(z)=cosz-1$, определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $cosz=1$, откуда $z_n=2\pi n\ (n=0,\pm1,\dots)$ – нули данной функции.

Найдем

$$f'(z)\,|_{z=z_n} = -sinz\,|_{z=2\pi n} = 0,$$

$$f''(z)\,|_{z=z_n} = -cosz\,|_{z=2\pi n} = -1 \neq 0.$$

Согласно определению (5.1), $z_n = 2\pi n$ являются нулями второго порядка.

Пример 5.2. Найти нули функции $f(z) = z^8 - 9z^7$,

определить порядок нуля.

Решение. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $z^7(z-9) = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 9$. Можно воспользоваться определением (5.1), однако проще использовать теорему 5.1. Функция $f(z)$ представима в виде

$f(z) = z^7(z-9)$, но тогда $z = 0$ является нулем порядка 7, функцией $\varphi(z)$ является сомножитель $\varphi(z) = z - 9$, $\varphi(0) = -9 \neq 0$; $z = 9$, является нулем порядка 1, функцией $\varphi(z)$ в данном случае является $\varphi(z) = z^7$, $\varphi(9) = 9^7 \neq 0$.

5.2 *Изолированные особые точки*

Определение 5.2. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции$f(z)$, если $f(z)$ аналитическая в некоторой окрестности этой точки, за исключением самой точки z_0, а в точке z_0 функция не определена или не дифференцируема.*

Определение 5.3. *Точка z_0 называется устранимой особой точкой функции $f(z)$, если существует конечный предел функции $f(z)$ в точке z_0*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = C.$$

Пример 5.3. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{1-e^{3z}}{z}$ и установить их тип.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - это $z_0 = 0$. Вычислим

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{3z}}{z} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{-3z}{z} = -3.$$

т.е. $z_0 = 0$ – устранимая особая точка.

Определение 5.4. *Точка z_0 называется <u>полюсом</u> функции $f(z)$, если*

$\lim\limits_{z\to z_0} f\,(z) = \infty$.

Теорема 5.2. *Для того, чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Теорема 5.3. *Пусть $f(z)$ является аналитической в окрестности точки z_0. Если точка z_0 – нуль порядка* n *для $f(z)$, то точка z_0 – полюс порядка* n *для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

Замечание. Если точка z_0 – полюс порядка *n* для $f(z)$, то точка z_0 – нуль порядка *n* для функции $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ при условии $\frac{1}{f(z_0)} = 0$.

Отметим, что без последнего условия $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ утверждение становится неверным. В самом деле, если $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$, то *z*=0 – полюс первого порядка. Однако функция $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \dfrac{z^2}{\sin z}$ не определена при *z*=0.

Теорема 5.4. *Если функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитическая функция в точке z_0 и*

$\varphi(z_0) \neq 0$, то точка z_0 является полюсом порядка n функции $f(z)$.

Замечание. Теорема остается справедливой, если z_0 – устранимая особая точка функции $\varphi(z)$ и существует $\lim\limits_{z\to z_0} \varphi\,(z) \neq 0$.

Например, если $\varphi(z) = \frac{sinz}{z}$, а $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z}$, то z_0=0 – полюс первого порядка функции $f(z)$.

<u>Пример 5.4.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{2z+1}{z^4-2z^3}$

и установить их тип.

Решение. Найдем нули функции $\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-2z^3}{2z+1}$. Поскольку

$z^4 - 2z^3 = z^3(z-2)$, то для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка $z = 0$ – это нуль третьего порядка согласно теореме 5.1, а $z = 2$ – нуль первого порядка. Пользуясь теоремой 5.2, имеем: $z = 0$ – это полюс третьего порядка функции $f(z)$, а $z = 2$ – полюс первого порядка.

Теорема 5.5. *Если функция* $f(z)$ *представима в виде* $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ *и точка* z_0 *является нулем порядка* m *для функции* $P(z)$ *и нулем порядка* l *для функции* $Q(z)$, *тогда*

1. если $m \geq l \geq 1$, *то точка* z_0 – *устранимая особая точка функции* $f(z)$;

2. если $m < l$, *то точка* z_0 *будет полюсом порядка* $n = m - l$ *функции* $f(z)$.

<u>Пример 5.5.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2 z^4}$ и установить их тип.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1 = 3$ и

$z_2 = 0$. В точке $z_1 = 3$ числитель и знаменатель $f(z)$ обращаются в нуль. Для числителя $P(z) = e^{z-3} - 1$ число $z = 3$ является нулем 1 порядка, так как $P'(z)\,|_{z=3} = e^{z-3}\,|_{z=3} = 1$, то $z = 3$ – нуль 1-го порядка, т.е. в теореме 5.5 $m = 1$. Знаменатель $Q(z) = (z-3)^2 z^4$ по теореме 5.1 в точке $z = 3$ имеет нуль 2-го порядка, т. е. $l = 2$. Следовательно по теореме 5.5 $l - m = 1$ – порядок полюса функции $f(z)$.

В точке $z = 0$ перепишем функцию в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^4}$, где $\varphi(z) = \frac{e^{z-3}-1}{(z-3)^2}$ – аналитическая функция в точке $z = 0$,

$\varphi(0) = \frac{e^{-3}-1}{9} \neq 0$. По теореме 5.4 $z = 0$ – полюс 4-го порядка. Окончательно, $z = 3$ – полюс первого порядка, $z = 0$ – полюс 4-го порядка.

Определение 5.5. *Точка* z_0 *называется* <u>*существенно особой*</u> *точкой, если в этой точке не существует ни конечного, ни бесконечного* *предела функции $f(z)$ при $z \to z_0$.*

5.3 Классификация изолированных особых точек по виду главной части ряда Лорана

Теорема 5.6. *Точка z_0 является устранимой особой точкой, если в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 отсутствует главная часть, т.е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Теорема 5.7. *Точка z_0 является полюсом n-го порядка функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит конечное число слагаемых, т.е.*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{, где } c_{-n} \neq 0.$$

Теорема 5.8. *Точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности z_0 содержит бесконечное количество членов.*

<u>Пример 5.6.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{sin3z}{z}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ $z_0 = 0$. Используя разложение в ряд Тейлора для функции $sinz$ (4.2) в окрестности точки $z_0 = 0$, получим разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[(3z) - \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 3 - \frac{9z^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{(3z)^{2n} \cdot 3}{(2n+1)!} + \ldots$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

<u>Пример 5.7.</u> Найти особые точки функции $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^5}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используя разложение в ряд Тейлора для функции e^z (4.1) в окрестности точки $z_0 = 0$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \frac{1}{z^5}\left[1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3 2!} + \frac{1}{z^2 3!} + \frac{1}{z 4!} + \frac{1}{5!} + \frac{z}{6!} + \ldots$$

Разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом четвертого порядка, т. к. наибольший показатель степени z, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, равен четырем.

<u>Пример 5.8.</u> Найти особые точки функции $f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$.

Определить тип особой точки.

Решение. Используем разложение (4.1)

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Полагая $t = \frac{1}{z-2}$, получим разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-2)$

$$f(z) = (z-2)^2\left[1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!(z-2)^4} + \ldots\right] = (z-2)^2 + (z-2) + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!(z-2)} +$$

$$+ \frac{1}{4!(z-2)^2} + \ldots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями $(z-2)$. Следовательно, точка $z_0 = 2$ является существенно особой точкой функции $f(z)$.

5.4 Вычеты функций

Определение 5.6. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется комплексное число, обозначаемое символом $resf(z_0)$ и определяемое равенством*

$$resf(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz,$$

где C – любой контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, содержащий внутри себя единственную особую точку z_0 функции $f(z)$.

Предполагается, что контур C проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

Теорема 5.9. *Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 является коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.*

<u>Формулы для вычисления вычетов функции $f(z)$.</u>

1. Если z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$,

то $resf(z_0)=0$.

2. Если z_0 – полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$resf(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n].$$

В частности, если z_0 – простой полюс, т.е. полюс первого порядка $(n=1)$, то

$$resf(z_0)=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)\ ].$$

3. Если точка z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета нужно найти коэффициент c_{-1} в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана: $resf(z_0)=c_{-1}$.

<u>Пример 5.9.</u> Найти вычеты функции $f(z)=\frac{cosz-1}{z^2(z-\pi)}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции $f(z)$ являются точки $z_1=0$, $z_2=\pi$.

В точке $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - 1}{z^2(z-\pi)} = \lim_{z\to 0}\frac{-z^2}{2z^2(z-\pi)} = \frac{1}{2\pi}.$$

Следовательно, $z = 0$ – устранимая особая точка и $res\, f(0) = 0$.

Точка $z = \pi$ - это полюс первого порядка. Тогда

$$res\, f(\pi) = \lim_{z\to\pi}\frac{(\cos z - 1)(z-\pi)}{z^2(z-\pi)} = \frac{-1-1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

Пример 5.10. Найти вычет функции $f(z) = z^2\sin\frac{1}{z}$ в особой точке.

Решение. Особая точка функции $f(z)$ - точка $z = 0$. Выпишем разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z, используя формулу (4.4)

$$f(z) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{5!\,z^5} - \frac{1}{7!\,z^7} + \ldots\right) =$$

$$= z - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!\,z^3} - \frac{1}{7!\,z^5} + \ldots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая точка функции $f(z)$. Вычет функции в точке $z = 0$ есть коэффициент $c_{-1} = -\frac{1}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$, (теорема 5.9).

Пример 5.11. Найти вычет функции $f(z) = \frac{1}{z^5 + 4z^3}$ в ее особых точках.

Решение. Особые точки функции находятся из решения

уравнения $z^5 + 4z^3 = 0$, т.е. $z^3(z+2i)(z-2i) = 0$. Получаем,

$z_1 = 0$ – полюс третьего порядка,

$z_{2,3} = \pm 2i$ – полюсы первого порядка.

Используя приведенные выше формулы для вычисления вычетов, найдем вычеты в точках z_2, z_3:

$$res\, f(2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{(z-2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(2i)^3 4i} = \frac{1}{32},$$

$$res\, f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{(z+2i)}{z^3(z+2i)(z-2i)} = \frac{1}{(-2i)^3(-4i)} = \frac{1}{32}.$$

Найдем вычет в точке z_1:

$$res\, f(0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1\cdot z^3}{z^3(z^2+4)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[-\frac{2z}{(z^2+4)^2}\right] =$$

$$= -\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z}{(z^2+4)^2} = -\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2+4}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}.$$

§ 6. Приложения теории вычетов

6.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 6.1. *Если функция $f(z)$ является аналитической всюду внутри области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, лежащих внутри кусочно-гладкой замкнутой кривой Г, Г⊂D, тогда*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\, f(z_k).$$

Контур *Г* проходится в положительном направлении, т.е. против часовой стрелки.

<u>Пример 6.1.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)}$.

Решение. Находим особые точки подынтегральной функции:

$z_1 = -2$ – полюс второго порядка,

$z_{2,3} = \pm i$ – полюсы первого порядка.

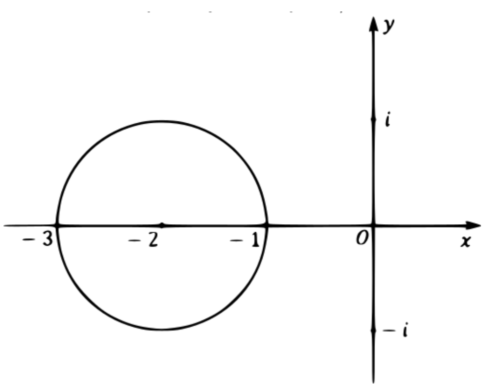


Рис. 10

Нарисуем контур $|z+2|=1$. Внутри контура лежит только одна особая точка $z_1 = -2$ (см. рис. 10).

По основной теореме о вычетах получаем

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = 2\pi i \cdot res f(-2).$$

Найдем $res\, f(-2)$:

$$\text{res}\, f(-2) = \lim_{z\to-2} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+2)^2}{(z+2)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to-2} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4}{25}.$$

Далее получим

$$\int_{|z+2|=1} \frac{dz}{(z+2)^2(z^2+1)} = \frac{8\pi i}{25}.$$

<u>Пример 6.2.</u> Вычислить интеграл $\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

Решение. В области $D: |z-i| < 2$ функция $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$ имеет одну особую точку $z = 0$. Разложение в ряд Лорана для заданной функции имеет вид (используем формулу (4.1))

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right) =$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов, поэтому $z = 0$ – существенно особая точка. Вычет в этой точке равен коэффициенту $c_{-1} = \frac{1}{3!}$, т.е. $res\, f(0) = \frac{1}{3!}$. По теореме 6.1 получаем ответ:

$$\int_{|z-i|=2} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot res\, f(0) = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

6.2 Вычисление несобственных интегралов

6.2.1 Интегралы от рациональных функций

Теорема 6.2. *Если* $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$, $Q(x)$ *– многочлены, причем многочлен* $Q(x)$ *не имеет действительных корней и степень* $Q(x)$ *«m» хотя бы на две единицы больше степени* $P(x)$ *«n»* $(m-n\geq 2)$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}res\,F(z_k),$$

где $F(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ *и* z_k *– полюсы функции* $F(z)$, *лежащие в верхней полуплоскости.*

Пример 6.3. Вычислить интеграл

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2},\quad (a>0).$$

Решение. Подынтегральная функция

$$F(x)=\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$$

является четной. Поэтому

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Введем функцию $F(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$. Функция $F(z)$ имеет две особые точки $z_1=ai$, $z_2=-ai$ – это полюсы второго порядка. В верхней полуплоскости находится точка $z=ai$, $a>0$. Условия теоремы 6.2 для функции $F(z)$ выполнены. Вычислим $resF(ai)$:

$$res\,F(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}[F(z)(z-ai)^2]=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ai)^2}=$$

$$=\lim_{z\to ai}\frac{2aiz}{(z+ai)^3}=\frac{2(ai)^2}{(2ai)^3}=\frac{1}{4ai}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot res\,F(ai) = \frac{\pi i}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

6.2.2 Вычисление интегралов с тригонометрическими функциями

Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет следующим *двум условиям (6.1):*

1) $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости и на действительной оси, кроме конечного числа полюсов, лежащих в верхней полуплоскости;

2) при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости и на действительной оси $z\cdot f(z) \to 0$ *равномерно по аргументу* z, т.е. $\max\limits_{z\in C_R}|z\cdot f(z)| \to 0$ при $R\to\infty$, контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости.

При этом справедливо равенство

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k). \tag{6.2}$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{n} res f(z_k)$ – сумма вычетов $f(z)$ относительно полюсов, лежащих в верхней полуплоскости. Разобьем интервал $(-R, R)$ на части $(-R, 0)$ и $(0, R)$ и заменим в первом из интегралов x на $(-x)$. В результате получим $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R [f(x)+f(-x)]dx = 2\pi i\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} res f(z_k)$. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty}[f(x)+f(-x)]dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k). \tag{6.3}$$

Используем полученный результат в частном случае, когда подынтегральная функция $f(z)$ имеет вид: $f(z) = F(z)\cdot e^{iaz}$, $a>0$, где функция $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1). Тогда этим же условиям будет удовлетворять и функция $f(z)$. Таким образом, если $F(z)$ удовлетворяет двум условиям (6.1), то

$$\int_0^{+\infty}[F(x)\cdot e^{iax} + F(-x)\cdot e^{-iax}]dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}]. \tag{6.4}$$

Пусть $F(z)$ – *четная* функция, т. е. $F(-z) = F(z)$. Тогда из (6.4) получаем

$$\int_0^{+\infty} F(x)\cdot\cos(ax)dx = \pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}]. \tag{6.5}$$

Аналогично, если $F(z)$ − *нечетная* функция, т. е. $F(-z) = -F(z)$, то

$$\int_0^{+\infty} F(x)\cdot\sin(ax)dx = \pi\cdot\sum_{k=1}^{n} res[F(z_k)\cdot e^{iaz_k}] \qquad (6.6)$$

Замечание. Отметим, что формулу (6.2) нельзя, вообще говоря, писать в виде

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} res f(z_k)$. В формуле (6.2) интеграл рассматривается в смысле главного значения [см. 6]. Но если из каких-либо соображений известно, что этот интеграл существует как обычный несобственный интеграл, то в этом случае интеграл в смысле главного значения совпадает с обычным несобственным интегралом.

Следующая лемма позволяет ослабить условия (6.1), наложенные на функцию $F(z)$. При этом формулы (6.5) и (6.6) сохраняются.

Лемма Жордана. *Если* $F(z)$ *в верхней полуплоскости и на действительной оси удовлетворяет условию:* $F(z) \to 0$ *равномерно при* $z \to \infty$ *и* $a>0$, то

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(z)\cdot e^{iaz}dz = 0.$$

Здесь контур C_R – полуокружность $|z| = R$ в верхней полуплоскости (рис. 11).

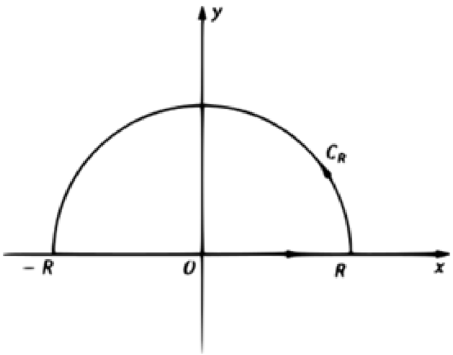


Рис. 11

Пользуясь леммой Жордана, можно доказать справедливость формул (6.5) и (6.6) при более слабых предположениях относительно функции $F(z)$. Вместо второго условия (6.1) достаточно потребовать, чтобы $F(z) \to 0$ равномерно при $z \to \infty$. Требование четности (нечетности) функции $F(z)$ сохраняется.

Если $F(z)= R(z)$ – рациональная функция, то справедливо следующее утверждение [см. 1].

Теорема 6.3. *Пусть* $R(z)$ *– рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя,* $R(z)$ не имеет полюсов на действительной оси, *и в верхней полуплоскости имеет полюса* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*; при* $z=x$ *функция* $R(x)$ *действительна при действительных* x*. Тогда для любого* $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\cdot R(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left[R(z_k)\cdot e^{i\alpha z}\right].$$

Следствие. Воспользовавшись формулой Эйлера:
$e^{i\alpha x} = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\,dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left(R(z_k)e^{i\alpha z}\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\alpha x\,dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{n} res\left(R(z_k)e^{i\alpha z}\right)\right]$$

$$(Im\, z_k > 0).$$

Отметим, что в теореме 6.3 не требуется четность (нечетность) функции $F(z)$.

Пример 6.4. Вычислить
$$I = \int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$$

Решение. Введем вспомогательную функцию $F(z) = \frac{ze^{i2z}}{z^2+3^2}$. Если $z = x$, то $Im\,F(x)$ совпадает с подынтегральной функцией $f(x) = \frac{x\sin 2x}{x^2+9}$. Поскольку подынтегральная функция $f(x)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$$

Функция $F(z) = \frac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет условиям леммы Жордана. Тогда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx = 2\pi i\cdot res\,F(3i).$$

$z = 3i$ – особая точка функции $F(z)$, находится в верхней полуплоскости и является простым полюсом.

$z = -3i$ – также особая точка $F(z)$, находится в нижней полуплоскости и в вычислении интеграла не используется.

Вычислим вычет в точке $z = 3i$

$$res\,F(3i) = \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z^2+9}(z-3i) =$$

$$= \lim_{z\to 3i} \frac{ze^{i2z}}{z+3i} = \frac{3ie^{-6}}{6i} = \frac{1}{2e^6}.$$

Подставляя полученное значение, получим

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\cdot Im\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^2+9}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i\cdot res_{z=3i}\frac{\left(ze^{i2z}\right)}{z^2+9}\right] = \frac{1}{2}\cdot Im\left[2\pi i\frac{1}{2e^6}\right] = \frac{\pi}{2e^6}.$$

В заключении приведем список использованных источников.

Литература

1. Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Физ.- мат. лит., 1991.-

448 с.

2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: URSS., 1987. – 688 с.

3. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Начало теории. Т.1. – М.: URSS., 2009. – 496 с.

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Дальнейшее построение теории. Т.2. – М.: URSS., 2009. – 624 с.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: URSS., 2015. – 440 с.

6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том III. Часть 2. – СПб., 2010. - 816с.

7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ (в 2-х частях). – М.: URSS., 2015. – 800 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория рядов и теория функций комплексного переменного имеют широкое применение в различных дисциплинах, используются при решении прикладных задач.

В математическом анализе степенные ряды применяются, например, для вычисления предела функции, при выполнении приближенных вычислений, вычислении значений производной функции в точке. Теория рядов используется в теории функций комплексной переменной. В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью рядов решают задачу Коши.

В теории вероятностей и в курсе случайных процессов к рядам обращаются при рассмотрении вопросов нахождения характеристик случайных величин, производящей функции, используют для спектрального разложения стационарных случайных процессов.

В курсе радиотехники с помощью рядов Фурье изучаются периодические сигналы, строятся амплитудные и фазовый спектры.

Теория функции комплексного переменного – один из важнейших разделов математического анализа, тесно связанный с теорией рядов. Основные положения ТФКП широко применяются при решении многих прикладных проблем. В настоящем пособии рассмотрены вопросы применения теории вычетов к вычислению контурных и несобственных интегралов. Но в действительности спектр использования ТФКП значительно шире. Например, идеи курса применяются при рассмотрении вопросов нахождения числа корней алгебраического уравнения, при восстановлении оригинала по его изображению, при изучении четырехполюсников и т.д.

В целом настоящее пособие обеспечивает полноценное формирование компетенций бакалавра по направлениям подготовки ИИТ. Материал пособия может быть полезен и при реализации некоторых программ магистратуры.

СОДЕРЖАНИЕ