Приложение

Подробно содержание «Приложения» изложено в учебном пособии: *Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. «Ряды. Интеграл и преобразование Фурье. Приложения». М.: МИРЭА, 2015.*

Данное учебное пособие рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений (инженерно-технические направления подготовки).

Содержание «Приложения»:

- числовые ряды, признаки сходимости; понятие абсолютной и условной сходимости; действия с рядами;
- функциональные ряды, область сходимости; понятие равномерной сходимости ряда; признак Вейерштрасса; непрерывность суммы функционального ряда; почленное интегрирование и дифференцирование ряда;
- степенные ряды и их свойства; теорема Абеля; ряд Тейлора; разложения элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена);
- приложения степенных рядов;
- ряд Фурье; сходимость ряда Фурье; представление периодической функции рядом Фурье;
- интеграл Фурье, преобразование Фурье;
- решение волнового уравнения методом Фурье.

1. Числовые ряды

Числовой ряд, сходимость числового ряда

<u>*Определение.*</u> Пусть задана числовая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Составленное из членов этой последовательности выражение $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется *числовым рядом*, члены последовательности называются членами этого ряда, a_n - общий член ряда. Обычно числовой ряд кратко записывается в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Рассмотрим суммы $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, . \ . \ . \ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

<u>*Определение*</u>. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется n-ой *частичной суммой* ряда. Частичные суммы образуют новую числовую последовательность $S_1, S_2, ..., S_n, ...$.

<u>*Определение*</u>. Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, т.е. $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называется суммой ряда.

<u>*Определение.*</u> Числовой ряд называется *расходящимся*, если предел последовательности частичных сумм равен бесконечности или не существует.

Рассмотрим примеры на вычисление суммы ряда по определению.

<u>*Пример*</u>. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}+\ldots.$$

<u>*Решение*</u>. Представим общий член ряда в виде разности

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3(3n-1)}-\frac{1}{3(3n+2)}$$

и вычислим частичную сумму с номером n

$$S_n=\left(\frac{1}{3\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 5}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3\cdot(3n-1)}-\frac{1}{3\cdot(3n+2)}\right)=\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3(3n+2)}$$

Существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ = $1/6$. Значит, данный ряд сходится и его сумма равна $1/6$.

<u>*Пример.*</u> Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)+\ldots.$$

<u>*Решение.*</u> Вычислим частичную сумму этого ряда

$$S_n=1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2.$$

В этом примере $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, следовательно, данный ряд расходится.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1\text{-}1+1\text{-}\ldots+(\text{-}1)^{n+1}+\ldots.$$

<u>*Решение.*</u> У этого ряда все частичные суммы с нечетными номерами равны 1, а частичные суммы с четными номерами равны 0. Значит, предел последовательности частичных сумм не существует, и ряд расходится.

Геометрическая прогрессия и гармонический ряд

<u>*Определение*</u>. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность $b,\ bq,\ bq^2,\ \ldots,\ bq^{n-1},\ldots\quad (b\neq 0,\ q\neq 0)$. Суммируя члены геометрической прогрессии, получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$.

<u>*Теорема*</u>. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$ сходится при условии $|q|<1$, и его сумма равна $\frac{b}{1-q}$. Если $|q|\geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b\cdot q^{n-1}$ расходится.

Доказательство. Запишем частичную сумму этого ряда

$S_{n+1} = b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n$ двумя способами:

$S_{n+1} = b + q(b + bq + \ldots + bq^{n-1}) = b + q\cdot S_n$,

$S_{n+1} = (b + bq + \ldots + bq^{n-1}) + bq^n = S_n + bq^n$.

Приравнивая эти выражения: $b + q\cdot S_n = S_n + bq^n$, получим $S_n(1-q) = b(1-q^n)$.

Предполагая, что $q \neq 1$, выразим S_n: $S_n = \frac{b(1-q^n)}{1-q}$.

В случае, когда $q=1$, очевидно, что $S_n = n\cdot b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{b}{1-q}$, т.е. ряд сходится, и его сумма $S = \frac{b}{1-q}$.

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится. Наконец, если $q=-1$, то частичные суммы попеременно принимают значения b и 0. Предел последовательности частичных сумм не существует. Ряд расходится. Теорема доказана.

<u>*Определение*</u>. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ называется *гармоническим рядом*.

Каждый член гармонического ряда, начиная со второго, является гармоническим средним соседних с ним членов:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Покажем, что гармонический ряд является *расходящимся*. Для этого воспользуемся тем, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ является монотонно возрастающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (2-ой замечательный предел). Все члены этой последовательности меньше числа e. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Прологарифмируем данное неравенство по основанию e

$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e \quad \Rightarrow \quad n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. Полученное неравенство справедливо для всех натуральных значений n:

$$1 > \ln 2 - \ln 1; \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2; \quad \frac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3;. \quad . \quad . \qquad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n .$$

Складывая эти неравенства, получим $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} > \ln(n+1)$. Это означает, что с возрастанием n частичные суммы гармонического ряда неограниченно возрастают и, следовательно, гармонический ряд расходится.

Необходимое условие сходимости числового ряда

Теорема. Если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Доказательство теоремы. Для сходящегося ряда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. А так как $a_n = S_n - S_{n-1}$, то $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Доказанная теорема – это лишь необходимое условие сходимости. *При нарушении этого условия ряд заведомо расходится*.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то, как показывают примеры, приведенные ниже, ряд может сходиться или расходиться. Так, для рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ необходимое условие сходимости выполнено, но первый из них является сходящимся, а второй – расходящимся.

Необходимое условие сходимости удобно применять для доказательства расходимости рядов.

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ на сходимость.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \neq 0$, то заданный ряд расходится по необходимому условию (оно нарушено).

Пример. Исследовать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ на сходимость.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n$ является расходящимся, т.к.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)^{-(3n+2)}\right)^{-\frac{n}{3n+2}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \neq 0$, т.е. необходимое условие не выполняется.

Определение. Если отбросить первые n членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то получится ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + ... + a_{n+k} ...$, который называется *остатком* данного ряда с номером n.

Теорема. Ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится любой из его остатков.

Следствие. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на сходимость ряда.

Теорема. Если ряд сходится, то сумма его остатка стремится к нулю с возрастанием номера остатка.

Критерий Коши сходимости рядов. Линейные действия с рядами

Теорема (*критерий Коши сходимости ряда*). Для сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных чисел k выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon .$$

Сходящиеся ряды обладают следующими свойствами.

Теорема.

1) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна A, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ также сходится и его сумма равна cA, где c - любое число.

Другими словами, если члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится и $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны A и B соответственно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ также сходится и его сумма равна $A+B$, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Числовые ряды с положительными членами

Определение. Положительными называются ряды, все члены которых неотрицательны: $a_n \geq 0$.

Последовательности частичных сумм таких рядов монотонно возрастают, т.к. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$, $n = 1, 2, 3, ...$

Как известно (теорема Больцано-Вейерштрасса), монотонная последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена. Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема. Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Непосредственное применение этого утверждения для доказательства сходимости обычно бывает затруднительным. Проще использовать другие средства, о которых идет речь ниже.

Признаки сравнения

Теорема (первый признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$. Если для всех номеров n (или для всех номеров n, бóльших некоторого номера N) выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Будем предполагать, что неравенство $a_n \leq b_n$ выполнено для всех номеров n. В противном случае можно отбросить конечное число членов ряда, для которых неравенство не выполнено, что не повлияет на сходимость ряда. Тогда $a_1 + a_2 + ... + a_n \leq b_1 + b_2 + ... + b_n$.

Если ряд (2) сходится, то его частичные суммы, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, ограничены, т.е. $b_1 + b_2 + ... + b_n \leq S$ для любого n, где S - некоторая константа. Но тогда ограничена и последовательность частичных сумм ряда (1), и ряд (1) сходится.

Если же ряд (1) расходится, то, предполагая, что ряд (2) сходится, получим противоречие. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \sqrt{n}}$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, как сумма геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Для всех номеров n справедливо неравенство $\frac{1}{2^n + \sqrt{n}} < \frac{1}{2^n}$. Согласно первому признаку сравнения данный ряд также сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Рассмотрим для сравнения гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который, как уже было доказано, расходится. Для всех $n \ge 2$ справедливо неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, следовательно, данный ряд также расходится по признаку сравнения.

Теорема (предельный признак сравнения). Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \,, \ (b_n > 0, \text{ начиная с некоторого номера } n). \qquad (2)$$

Если существует конечный, отличный от нуля $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, то ряды (1) и (2) оба сходятся или оба расходятся.

Доказательство. Предположим, что ряд (2) сходится. Обозначим $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,\ A > 0$. По определению предела для любого положительного ε и достаточно больших номеров n будет выполнено неравенство

$$\frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon \quad \text{или} \quad a_n < (A + \varepsilon) \cdot b_n .$$

Т.к. ряд (2) сходится, то согласно свойству сходящихся рядов сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (A + \varepsilon) b_n$, а, значит, по первому признаку сравнения сходится и ряд (1).

Рассматривая $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$, который также существует, конечен и отличен от нуля, придем к выводу, что из сходимости ряда (1) следует сходимость ряда (2). Итак, если один из рядов сходится, то другой также сходится.

Далее, предполагая, что один из рядов расходится, а другой сходится, получим противоречие с уже доказанным утверждением. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=\infty$, то из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ вытекает расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$.

<u>Пример</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

<u>Решение</u>. Пользуясь определением сходимости, т.е. рассматривая предел частичных сумм, уже было доказано, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ сходится. Значит, сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, т.к. предел отношения общих членов этих рядов конечен и отличен от нуля

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)(3n+2)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\right)=9.$$

Признак Даламбера

<u>Теорема</u>. Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=D$. Если $D<1$, то ряд сходится, если $D>1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $D<1$. Возьмем $\varepsilon=\dfrac{1-D}{2}>0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon = D + \frac{1-D}{2} = \frac{1+D}{2} = q < 1.$$

Отсюда получим $a_{N+1} < a_N \cdot q$, $a_{N+2} < a_{N+1} \cdot q < a_N \cdot q^2$, ... $a_{N+k} < a_N \cdot q^k$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, согласно первому признаку сравнения, ряд сходится.

Если $D > 1$ или $D = \infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии, и, значит, ряд расходится.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

<u>*Решение*</u>. Вычислим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1,$$ т.е. ряд сходится по признаку Даламбера.

<u>*Пример.*</u> Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

<u>*Решение*</u>. Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

и, согласно признаку Даламбера, данный ряд расходится.

Радикальный признак Коши

<u>*Теорема (радикальный признак Коши).*</u> Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = K$. Если $K < 1$, то ряд сходится, если $K > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Пусть $K < 1$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1-K}{2} > 0$. Согласно определению предела, начиная с некоторого номера N, будет выполнено неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon = K + \frac{1-K}{2} = \frac{1+K}{2} = q < 1,$$

или $a_n < q^n$, т.е. члены ряда оказываются меньше, чем члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, ряд сходится.

Если $K > 1$ или $K = \infty$, то члены ряда оказываются больше, чем члены бесконечно возрастающей геометрической прогрессии и, значит, ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$.

Решение. Вычислим

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right) = \frac{1}{3} < 1$, значит, ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение. Применим радикальный признак Коши:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2} > 1$, значит, ряд расходится.

Замечание. Признаки Даламбера и Коши не дают ответа на вопрос о сходимости ряда в случае, когда соответствующие пределы равны 1. Например, вычислим эти пределы для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходимость которого была доказана:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}e^{-\frac{\ln n}{n}} = e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

При вычислении последнего предела было использовано правило Лопиталя для раскрытия неопределенности

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right):\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Такой же результат получим, рассматривая сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

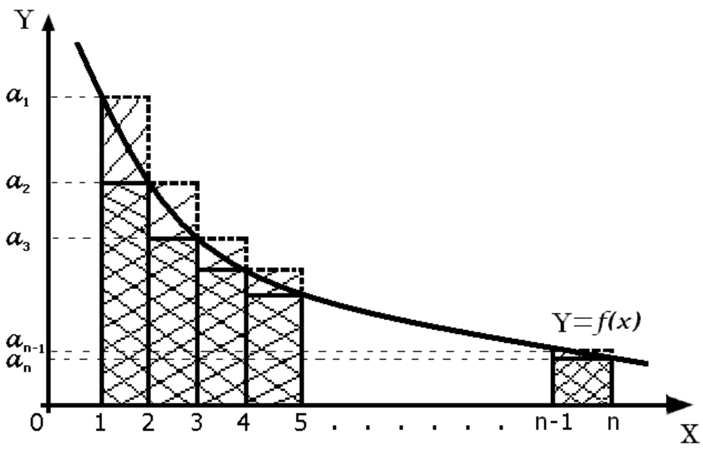
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(n^{-\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}e^{-\frac{2\ln n}{n}} = e^{-2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1.$$

Интегральный признак Коши

<u>*Теорема (интегральный признак Коши)*</u>. Пусть дан положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого совпадает со значением некоторой функции $f(x)$ при $x = n$: $a_n = f(n)$. Предположим, что функция $f(x)$ определена, положительна, непрерывна и монотонно убывает при $x \geq 1$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если сходится $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Доказательство. Для иллюстрации рассмотрим график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, и построим ступенчатые фигуры, одна из которых вписана в криволинейную трапецию, ограниченную графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 1$, $x = n$, а другая описана около этой трапеции.



Площадь вписанной ступенчатой фигуры равна $a_2 + a_3 + ... + a_n$, площадь описанной фигуры равна $a_1 + a_2 ... + a_{n-1}$. Площадь самой криволинейной трапеции равна $\int_1^{n} f(x)dx$ и заключена между площадями вписанной и описанной фигур:

$$a_2 + a_3 + ... + a_n < \int_1^{n} f(x)dx < a_1 + a_2 ... + a_{n-1}.$$

Пусть интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. имеет конечное значение: $\int_1^{+\infty} f(x)dx = J$. Тогда частичные суммы ряда S_n ограничены:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + J .$$

Следовательно, ряд сходится.

Если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n > \int_1^n f(x)dx + a_n > \int_1^n f(x)dx \to \infty, \quad n \to \infty,$$

следовательно, ряд расходится.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, который называют обобщенным гармоническим рядом или рядом Дирихле. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при условии $\alpha > 1$ и расходится при условии $\alpha \le 1$, следовательно, обобщенный гармонический ряд сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$.

На основе этого примера можно сформулировать следующий признак.

Признак Дирихле. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \le 1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Решение. Соответствующий несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$, а, значит, данный ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Замечание. Выше приведены основные признаки сходимости положительных рядов. Есть другие, более «тонкие» признаки, дающие ответ на вопрос о сходимости рядов в тех случаях, где рассмотренные признаки «не работают».

Знакопеременные числовые ряды

Определение. Числовой ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные числа.

Если отрицательных членов конечное число, то, отбросив их, получим положительный ряд. Если положительных членов конечное число, то, отбросив их, получим отрицательный ряд, который можно исследовать с помощью теорем о сходимости положительных рядов, изменив знаки всех членов ряда. Существенно новым является тот случай, когда среди членов ряда бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных чисел.

Рассмотрим случай, когда знаки членов ряда чередуются, например, члены с нечетными номерами положительны, а члены с четными номерами отрицательны.

*Определение*. Ряды представленные в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n$, где $a_n>0$, называются *знакочередующимися* рядами.

*Теорема Лейбница* _*(признак сходимости знакочередующегося ряда*_). Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю: $a_{n+1}<a_n$, $n=1,\ 2,\ 3...$, и стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд сходится.

Доказательство. Для определенности возьмем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$, $a_n>0$.

Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+...+(a_{2n-1}-a_{2n}).$$

Члены ряда сгруппированы так, что все слагаемые этой суммы – положительные числа. Значит, частичные суммы с четными номерами возрастают с ростом n. С другой стороны $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-...-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$ т.е. частичные суммы с четными номерами ограничены первым членом ряда: $S_{2n}<a_1$. Следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$. Для частичных сумм с нечетными номерами справедливо равенство $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}$, из которого следует, что

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+a_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=S.$$

Итак, частичные суммы с четными и нечетными номерами имеют один и тот же предел и, следовательно, ряд сходится, и его сумма равна S.

*Определение*. Знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

Замечание. Частичные суммы с четными номерами приближаются к сумме ряда S, возрастая, а частичные суммы с нечетными номерами –

убывая, т.е. справедливо неравенство: $S_{2n} < S < S_{2n-1}$. В частности, $0 < S < a_1$.

Если первый член ряда Лейбница $-a_1$ отрицателен, то $-a_1 < S < 0$.

В любом случае сумма ряда имеет знак его первого члена и меньше его по модулю.

Остаток ряда Лейбница также является рядом Лейбница. Следовательно, сумма остатка имеет знак своего первого члена и меньше его по модулю. Так для ряда Лейбница легко оценивается разность между суммой и частичной суммой.

<u>*Пример*</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$, где $a_n=\frac{\ln n}{n}$.

<u>*Решение*</u>. Для проверки выполнения условий теоремы Лейбница введем функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ и докажем, что она монотонно убывает, начиная с некоторого значения x, и стремится к нулю при $x\to+\infty$. Вычислим производную $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ для $x>e$.

Это означает, что, начиная с номера $n=3$, верно неравенство $a_{n+1}<a_n$. Как уже было показано, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$. Следовательно, условия теоремы Лейбница выполнены, и ряд сходится.

Замечание. Составим ряды из модулей членов рассмотренных рядов:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$. Оба эти ряда расходятся. Первый из них является гармоническим, а члены второго, начиная с $n=3$, больше, чем члены гармонического ряда.

Абсолютная и условная сходимость

Пусть дан произвольный знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ составлен из модулей его членов.

<u>*Теорема*</u>. Если сходится ряд из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Доказательство. Пусть сходится ряд из модулей. Тогда согласно критерию Коши для любого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что для любого номера $n>N$ и любого натурального k будет верно неравенство:

$$|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+k}|<\varepsilon.$$

Для знакопеременного ряда получим оценку

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+k}\right| \le \left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\ldots+\left|a_{n+k}\right|<\varepsilon,$$

что означает, что условие сходимости для него выполняется, т.е. сам знакопеременный ряд сходится.

Определение. Если сходится ряд, составленный из модулей членов данного ряда, то сам знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*.

Определение. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

При установлении абсолютной сходимости можно пользоваться всеми признаками сходимости положительных рядов.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{3n+1}{5n+3}\right)^n$.

Решение. Применим радикальный признак Коши к ряду из модулей

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)=\frac{3}{5}<1.$$

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Ряд из модулей является расходящимся как обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha=\dfrac{1}{3}$. Однако, для данного ряда выполнены условия теоремы Лейбница, т.е. ряд сходится условно.

Без доказательства отметим свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема. Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный произвольной перестановкой его членов, также сходится и имеет ту же сумму. (Другими словами, абсолютно сходящийся ряд обладает переместительным свойством так же, как и конечная сумма).

Если ряд сходится условно, то надлежащей перестановкой его членов можно изменить сумму ряда на любое заданное число, а также сделать ряд расходящимся.

2. Функциональные ряды

Определение. Пусть дана последовательность функций $u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots$, определенных на некотором множестве X. Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *функциональным* рядом, а множество X – областью определения этого ряда.

При подстановке произвольного значения x из множества X функциональный ряд становится числовым, причем при одних значениях x числовой ряд может быть сходящимся, а при других – расходящимся.

Определение. Множество значений переменной x, при которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости* функционального ряда.

Например, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ определены при любых значениях x. Областью сходимости первого из них является интервал $(-1,1)$, а областью сходимости второго – промежуток $(1,+\infty)$. Сумма функционального ряда $S(x)$ представляет собой функцию, определенную на области сходимости ряда.

Равномерная сходимость функционального ряда

Определение. Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится на множестве X. $S_n(x)$, $S(x)$ – частичная сумма и сумма этого ряда соответственно. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n>N$ и для любого $x\in X$ будет выполнено неравенство $|r_n(x)|=|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

Другими словами, ряд сходится равномерно на множестве X, если разность между частичной суммой и суммой ряда становится сколь угодно малой, начиная с некоторого номера, одновременно для всех x, принадлежащих множеству X.

1. *Теорема Вейерштрасса (достаточное условие равномерной сходимости)*. Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ при всех x, принадлежащих множеству X, удовлетворяет неравенству $|u_n(x)|\le a_n$, $n=1,\ 2,\ 3,\ ...$, где $a_n\ge 0$ - члены некоторого сходящегося числового ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве X.

Доказательство. Абсолютная сходимость функционального ряда при всех $x \in X$ следует из признака сравнения и из сходимости числового ряда. Покажем, что функциональный ряд сходится равномерно на множестве X. Из условия теоремы следует, что для любого натурального числа k и для любого $x \in X$ верно неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+k}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + ... +$$

$$+ |u_{n+k}(x)| \le a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k} \le \rho_n$$, где ρ_n – остаток числового ряда. Переходя в этом неравенстве к пределу при условии $k \to \infty$, получим $|r_n(x)| \le \rho_n$, где $r_n(x)$ – остаток функционального ряда. По условию теоремы числовой ряд сходится, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех номеров $n > N$ будет выполнено неравенство $\rho_n < \varepsilon$, а, значит, и для остатка функционального ряда $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$, т.е. функциональный ряд сходится равномерно на множестве X.

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, удовлетворяющий условиям теоремы Вейерштрасса, называется *мажорирующим* числовым рядом для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ или *числовой мажорантой*.

Пример. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно при всех x.

Решение. Мажорирующим числовым рядом для данного функционального ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, т.к. $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ при всех x. А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то данный функциональный ряд сходится равномерно на всей числовой оси.

Пример. Доказать, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3 + x^3}$ сходится равномерно на промежутке $[0, +\infty)$.

Решение. Члены данного функционального ряда неотрицательны при $x \in [0, +\infty)$. Для построения мажоранты найдем при каждом фиксированном n максимальное значение функции $u_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^3}$.

Для этого вычислим производную

$$u_n'(x)=\frac{n^3+x^3-3x^3}{(n^3+x^3)^2}=\frac{-2x^3+n^3}{(n^3+x^3)^2}=\frac{-2\left(x^3-\frac{n^3}{2}\right)}{(n^3+x^3)^2}.$$

Производная $u_n'(x)=0$ при $x=\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$, и эта точка является точкой максимума функции $u_n(x)$ (проверить, вычислив вторую производную). Максимальное значение $(u_n(x))_{\max}=u_n\left(\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}}{n^3+\frac{n^3}{2}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$.

Значит, члены функционального ряда на множестве $[0,+\infty)$ удовлетворяют неравенству $0\le u_n(x)\le\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$. Поскольку числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то числовой ряд, общий член которого равен $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\cdot\frac{1}{n^2}$, также сходится. В силу теоремы Вейерштрасса данный функциональный ряд сходится равномерно на промежутке $[0,+\infty)$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, который сходится при всех x и все члены которого непрерывны на всей числовой оси. Сумма ряда $S(x)=\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}=1+x^2$, если $x\neq 0$, $S(0)=0$, терпит разрыв в точке $x=0$, несмотря на то, что члены ряда непрерывны при всех x. Это объясняется неравномерностью сходимости данного ряда на любом множестве, содержащем точку $x=0$. Покажем, что ряд не является равномерно сходящимся, оценивая остаток ряда при $x\neq 0$

$$r_n(x)=\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}+\ldots=\frac{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Поскольку $\lim_{x\to 0}r_n(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}=1$, то остаток ряда не может быть сколь угодно мал одновременно при всех x ни для какого номера n. Следовательно, ряд сходится неравномерно на множестве, содержащем точку $x=0$.

Перейдем к изучению свойств функциональных рядов, сходящихся равномерно на некотором отрезке.

Теорема (непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда). Пусть функции $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,\,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке. Тогда сумма ряда $S(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x_0, принадлежащую отрезку $[a,\,b]$, и для любого значения x, также принадлежащего отрезку $[a,\,b]$, оценим разность

$$|S(x)-S(x_0)| = |(S(x)-S_n(x))-(S(x_0)-S_n(x_0)+(S_n(x)-S_n(x_0))| \le$$
$$\le |S(x)-S_n(x)| + |S(x_0)-S_n(x_0)| + |S_n(x)-S_n(x_0)|.$$

Выберем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости ряда можно фиксировать номер n такой, что неравенство $|S(x)-S_n(x)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$ будет выполнено для всех $x\in[a,\,b]$, в том числе и для x_0. При фиксированном n частичная сумма ряда $S_n(x)$ является непрерывной на отрезке $[a,\,b]$ как сумма конечного числа непрерывных функций. Поэтому для выбранного $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что для любого x, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, будет выполнено неравенство $|S_n(x)-S_n(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Тогда разность $|S(x)-S(x_0)|<\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, что доказывает непрерывность суммы ряда в точке x_0, а т.к. x_0 выбрано произвольно на отрезке $[a,\,b]$, то $S(x)$ непрерывна на $[a,\,b]$.

Другие свойства равномерно сходящихся рядов сформулируем без доказательства.

Теорема (почленное интегрирование). Если функции $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ непрерывны на отрезке $[a,\,b]$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то интеграл от суммы ряда $S(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ представляется в виде суммы интегралов от членов этого ряда $\int\limits_a^b S(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx$, т.е. $\int\limits_a^b \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx$.

Замечание. Интегрирование можно выполнить на любом отрезке, принадлежащем отрезку $[a,b]$.

Пример. Вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

Решение. Пусть S - искомая сумма, представим S в виде $S=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^{n-1}}$. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$. На любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, этот ряд сходится равномерно, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом. Пусть $\sigma(x)$ – сумма этого ряда, тогда $S=\frac{1}{3}\sigma(\frac{1}{3})$. Применим к построенному функциональному ряду теорему о почленном интегрировании. Интегрирование выполним на отрезке $[0,x]$, полагая, что $x\in(-1,1)$

$$\int\limits_0^x \sigma(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^x n\cdot x^{n-1}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Тогда $\sigma(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$. Искомая сумма $S=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$.

Теорема (почленное дифференцирование). Пусть функции $u_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные $u_n'(x)$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Тогда сумма $S(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная суммы равна сумме ряда из производных $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, т.е. $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.

Пример. Вычислить сумму числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}$.

Решение. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, который сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим исходную сумму числового ряда S, а сумму функционального ряда $S(x)$. Тогда $S = S\left(\frac{1}{2}\right)$. Рассмотрим ряд из производных $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу $(-1,1)$, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом, Применим к данному ряду теорему о почленном дифференцировании

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n} = \frac{1}{1-x}.$$

Учитывая, что $S(0) = 0$, получим $S = -\ln(1-x)$. Искомая сумма $S = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln 2$.

Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$.

Рассматриваются также степенные ряды более общего вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$, которые с помощью замены $(x-x_0)$ на новую переменную сводятся к рядам вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, изучением которых можно ограничиться. Выясним, какой вид имеет область сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в любой точке x, такой что $|x| < |x_0|$.

*Доказательство***.** Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x_0{}^n$ следует, что его общий член стремится к нулю, а, значит, ограничен, т.е. существует положительное число M такое, что $\left|a_n x_0{}^n\right| \le M$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$.

Возьмем произвольное x, для которого $|x| < |x_0|$ и рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$. Оценим его общий член $|a_n x^n| = \left| a_n x_0{}^n \cdot \left(\frac{x}{x_0} \right)^n \right| = |a_n x_0{}^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \cdot q^n$, где $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$.

Общий член рассматриваемого ряда меньше, чем соответствующие члены бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Значит, степенной ряд сходится абсолютно в точке x. Теорема доказана.

Интервал и радиус сходимости степенного ряда

Заметим, что любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = 0$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$. Применим для нахождения его области сходимости признак Даламбера $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$, если $x \ne 0$. Значит, данный ряд сходится только в одной точке $x_0 = 0$.

Предположим, что для степенного ряда существуют отличные от нуля значения x, при которых он сходится. Если множество этих значений не ограничено, то согласно теореме Абеля ряд сходится всюду, причем абсолютно.

Пусть множество значений x, при которых степенной ряд сходится, ограничено, и положительное число R – точная верхняя грань этого множества. Если $|x| < R$, то найдется значение x_0 такое, что $|x| < |x_0| \le R$, при котором ряд сходится. Тогда согласно теореме Абеля ряд сходится абсолютно в точке x. Итак, степенной ряд сходится абсолютно в интервале $(-R, R)$ и расходится вне этого интервала. На концах интервала, т.е. при $x = \pm R$ может иметь место как сходимость, так и расходимость ряда.

Определение. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а число R – *радиусом сходимости*.

Если степенной ряд сходится на всей числовой оси, то его радиус сходимости $R = \infty$, а если ряд сходится только в одной точке $x = 0$, то $R = 0$.

Замечание. Степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится или в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке x_0, или на всей числовой оси, или только в точке $x = x_0$.

Замечание. Интервал сходимости степенного ряда может быть найден с помощью признаков Даламбера или Коши. Для установления сходимости или расходимости на концах интервала требуется дополнительное исследование с помощью других теорем.

Радиус сходимости степенного ряда: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ и, соответственно, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$,если эти пределы существуют (конечные или бесконечные).

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)}{2^n}x^n$.

Решение. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(n+1)x^n}\right| = \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{2}<1 \Leftrightarrow |x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2.$$

$(-2,2)$ – интервал сходимости, $R=2$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала. Обозначая общий член ряда $u_n(x)$, вычислим его значения на концах интервала: $u_n(-2)=(-1)^n\cdot(n+1)$, $u_n(2)=n+1$.

При $x=\pm 2$ не выполняется необходимое условие сходимости, следовательно, на концах интервала ряд расходится.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{3^n\cdot\ln n}$.

Решение. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{3^{n+1}\cdot\ln(n+1)}\cdot\frac{3^n\cdot\ln n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{|x+1|}{3}.$$

При вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}$ используется правило Лопиталя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{\ln(t+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t+1}}\lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} = 1.$$

Интервал сходимости определяется из неравенства

$$\frac{|x+1|}{3}<1 \Leftrightarrow |x+1|<3 \Leftrightarrow -3<x+1<3 \Leftrightarrow -4<x<2.$$

$(-4,2)$ – интервал сходимости, $R=3$ – радиус сходимости.

Исследуем сходимость на концах интервала. При $x=-4$ получим положительный ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Покажем, что для любого номера $n=2,\ 3,\ 4,...$ выполнено неравенство $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}\Leftrightarrow\frac{\ln n}{n}<1$. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ и вычислим ее производную: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ при $x>e$. Так как $f(2)=\frac{\ln 2}{2}<1,\ f(3)=\frac{\ln 3}{3}<1$, а при $x>e$ $f(x)$ убывает, то ее значения меньше 1 при всех $n=2,3,4,...$. Члены полученного ряда больше, чем соответствующие члены гармонического ряда, т.е. при $x=-4$ ряд расходится. При $x=2$ получим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$, который сходится условно как знакочередующийся ряд Лейбница.

Пример. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0 \text{ при всех } x.$$

Следовательно, область сходимости данного ряда – вся числовая ось.

Теорема (о равномерной сходимости степенного ряда). Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится равномерно на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости.

Доказательство. Пусть $(-R,R)$ – интервал сходимости степенного ряда и $[a,b]$ – произвольный отрезок, принадлежащий этому интервалу. Обозначим x_0 – максимальное из чисел $|a|,\ |b|$. Тогда для всех $x\in[a,b]$ будет выполняться неравенство $|x|\le|x_0|$. Степенной ряд сходится абсолютно в точке x_0, т.к. $x_0\in(-R,R)$. Кроме того, $\left|a_n x^n\right|\le\left|a_n x_0^n\right|$, Т.е. степенной ряд мажорируется на отрезке $[a,b]$ сходящимся положительным числовым рядом, а, значит, согласно теореме Вейерштрасса, сходится на этом отрезке равномерно. Теорема доказана.

Степенные ряды обладают свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Сумма степенного ряда непрерывна на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, а, значит, непрерывна на всем интервале.

2. Интеграл от суммы степенного ряда $S(x)$ на любом отрезке, принадлежащем интервалу сходимости, равен сумме ряда, полученного из данного степенного ряда путем почленного интегрирования на том же отрезке

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n dx .$$

Если в качестве отрезка интегрирования взять отрезок $[0, x]$, где x принадлежит интервалу сходимости, то равенство приобретает вид

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n ,$$

Т.е. в результате почленного интегрирования степенного ряда на отрезке $[0, x]$ получается также степенной ряд. Пользуясь, например, признаком Даламбера, можно показать, что радиус сходимости полученного ряда совпадает с радиусом сходимости исходного ряда.

3. При почленном дифференцировании степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ получим также степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n$ с тем же радиусом сходимости. Это означает, что сумма степенного ряда дифференцируема на интервале сходимости, и производная суммы равна сумме ряда из производных.

Почленное дифференцирование можно применить повторно к ряду из производных первого порядка, второго и т.д. Значит, сумма степенного ряда имеет внутри интервала сходимости производные всех порядков.

Замечание. При почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда интервал сходимости сохраняется. Сходимость на концах интервала следует проверять отдельно.

Пример. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$.

Решение. Данный ряд сходится на промежутке $(-1, 1]$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном дифференцировании:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x} .$$

Полученный в результате почленного дифференцирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$. Учитывая, что $S(0) = 0$, найдем $S(x) = \ln(1+x)$.

<u>*Пример*</u>. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n$.

<u>*Решение*</u>. Данный ряд сходится на интервале $(-1,1)$. Обозначим $S(x)$ его сумму и применим теорему о почленном интегрировании:

$$\int\limits_0^x S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}.$$

Полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд является суммой геометрической прогрессии и сходится на интервале $(-1,1)$. Сумма ряда $S(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Ряд Тейлора

Частичными суммами степенных рядов являются многочлены, что делает степенные ряды удобным средством для приближенных вычислений. Вопрос о представлении функций степенными рядами имеет особое значение.

Предположим, что заданная функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков. Тогда согласно формуле Тейлора для всех значений x из этого интервала выполняется равенство

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ остаточный член формулы Тейлора. Он записывается разными способами, например, в форме Лагранжа $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где $x_1\in(x_0,x)$.

При этом n можно выбрать сколь угодно большим, т.е. учитывать в этой формуле сколь угодно большие степени переменной $(x-x_0)$. Естественно возникает вопрос о возможности представления функции $f(x)$ в виде бесконечной суммы или в виде степенного ряда

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots.$$

Такой ряд, независимо от того, сходится он или не сходится к функции $f(x)$ в некотором интервале, называется *рядом Тейлора* этой функции, а его коэффициенты – коэффициентами Тейлора. Если $x_0 = 0$, то данный степенной ряд называется *рядом Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Согласно формуле Тейлора разность между значениями функции $f(x)$ и частичной суммой ряда Тейлора с номером $(n+1)$ этой функции равна остаточному члену формулы Тейлора $R_n(x)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы при некотором значении x значение функции $f(x)$ совпадало с суммой ряда Тейлора этой функции необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора при этом значении x стремится к нулю с возрастанием n: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Теорема. Если функция $f(x)$ в некотором интервале с центром в точке x_0 имеет производные всех порядков и все производные для всех x из этого интервала ограничены одним и тем же числом: $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, то ряд Тейлора этой функции сходится к самой функции на данном интервале.

Это утверждение применимо к таким элементарным функциям как e^x, $\sin x$, $\cos x$. Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ дифференцируемы всюду бесконечное число раз, и все их производные ограничены по модулю единицей. Значит, эти функции можно разложить в ряды Тейлора на любом интервале с центром в любой точке.

Теорема (о единственности представления функции степенным рядом). Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,то этот ряд является рядом Тейлора этой функции.

Доказательство. Полагая $x = x_0$ в формуле $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, получим $f(x_0) = a_0$. Применим к данному степенному ряду теорему о почленном дифференцировании:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot (x - x_0)^{n-2},$$

. . . .

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k},$$

. . . .

Полагая в этих равенствах $x = x_0$, получим

$$f'(x_0) = a_1 \cdot 1,$$
$$f''(x_0) = a_2 \cdot 2 \cdot 1,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ..$$

Значит, для коэффициентов ряда справедливы формулы:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \ldots,$$

т.е. данный ряд является рядом Тейлора этой функции. Теорема доказана.

Замечание. Теорема единственности позволяет доказывать некоторые тождества. Для этого раскладывают некоторую функцию двумя способами в степенной ряд. В силу теоремы единственности коэффициенты в обоих рядах при одинаковых степенях x совпадают.

Разложение основных элементарных функций

Выпишем разложения в ряды Маклорена основных элементарных функций.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1),$$

Последнее разложение при $\alpha = -1$ принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n \cdot x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Заменяя x на $(-x)$, приходим к стандартной формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1).$$

Пример. Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в ряд Маклорена. Найти производную n-го порядка в точке $x_0=0$.

Решение. Воспользуемся тригонометрическим тождеством $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$, а затем табличным разложением функции $\cos x$, заменяя переменную x на переменную $(2x)$:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-...+(-1)^n\cdot\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+...\right)=$$

$$=\frac{2}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+..., \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

В силу теоремы единственности имеем $f^{(2n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}\cdot(2n)!=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}$, $f^{(2n+1)}(0)=0$.

Пример. Разложить функцию $f(x)=\ln(x^2+5x+6)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=-1$, т.е. по степеням переменной $(x+1)$. Найти производную n-го порядка в точке $x_0=-1$.

Решение. Пользуясь свойствами логарифмической функции, выполним тождественные преобразования

$$y=\ln(x^2+5x+6)=\ln\big((x+2)(x+3)\big)=\ln(x+2)+\ln(x+3)=$$

$$=\ln\big(1+(x+1)\big)+\ln\big(2+(x+1)\big)=\ln 2+\ln\big(1+(x+1)\big)+\ln\left(1+\frac{x+1}{2}\right),$$

а затем применим табличное разложение функции $\ln(1+x)$, делая соответствующие замены

$$y=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x+1)^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x+1)^n}{2^n\cdot n}=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)(x+1)^n .$$

Чтобы найти значения x, для которых справедлива полученная формула, решим систему неравенств

$$\begin{cases}-1<x+1\le 1\\ -1<\dfrac{x+1}{2}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow\ -1<x+1\le 1 \ \Leftrightarrow\ -2<x\le 0.$$

В силу теоремы единственности имеем $f^{(n)}(-1)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)\cdot n!$.

Пример. Разложить в ряд Маклорена функцию $y=arctg(x)$. Найти производную n-го порядка в точке $x_0=0$.

Решение. Воспользуемся табличным разложением для представления степенным рядом производной этой функции

$$y' = (arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n \cdot x^{2n} + ... \ , \quad x \in (-1,1).$$

Тогда $arctg(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... \ , \quad x \in [-1,1].$

Заметим, что производная представляется степенным рядом на интервале $(-1,1)$, а сама функция – на отрезке $[-1,1]$.

В силу теоремы единственности имеем

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot (2n+1)! = (-1)^{n+1} \cdot (2n)!, \quad f^{(2n)}(0) = 0.$$

3. Применение теории рядов

Рассмотрим различные примеры применения степенных рядов.

Приближенные вычисления значений функций

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{2}$ с точностью до 5 знаков после запятой.

Решение. Для решения задачи воспользуемся табличным разложением функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = \frac{1}{3}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + ... = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - ...$$

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{128}{64}\cdot\frac{125}{125}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{5}{4}\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{(125)^2} + \frac{1}{75\cdot(125)^2} - ...\right).$$

Последнее выписанное слагаемое этой суммы меньше, чем 10^{-5}. Кроме того, полученный числовой ряд является знакочередующимся рядом Лейбница, поэтому ошибка при замене суммы ряда на частичную сумму не превосходит по модулю первого отброшенного члена ряда. Значит, для достижения заданной точности достаточно учесть первые три члена ряда: $\sqrt[3]{2} \approx \frac{5}{4}(1 + 0{,}008 - 0{,}000064) = 1{,}25992$.

Приближенные вычисления значений определенных интегралов

Пример. Вычислить с точностью до 3 знаков после запятой

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x}dx \cdot$$

<u>*Решение*</u>. Воспользуемся полученным разложением функции $arctg(x)$ в ряд Маклорена

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^6}{7}+...\right)dx =$$

$$= \left(x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\frac{x^7}{7^2}+...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3^2}+\frac{1}{2^5\cdot 5^2}-\frac{1}{2^7\cdot 7^2}+....$$

Получен знакочередующийся ряд Лейбница, последнее выписанное слагаемое меньше, чем 10^{-3}. Отбрасывая это слагаемое, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{arctg(x)}{x}dx \approx 0{,}5-0{,}01389+0{,}00125 \approx 0{,}487 .$$

Вычисление предела последовательности

Теория рядов используется в теории последовательностей.

<u>*Пример*</u>. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{[(3n)!]} = 0$.

<u>*Решение*</u>. Составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{[(3n)!]}$. Для изучения его сходимости применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{(n+1)}[(3n)!]}{[(3(n+1)!]\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3(3n+1)(n+1)(3n+2)} = e\cdot 0 = 0 < 1 .$$

По признаку Даламбера ряд сходится и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(3n)!} = 0 \cdot$$

Вычисление значения производной функции в точке

Если функция $f(x)$ представима на некотором интервале с центром в точке x_0 степенным рядом: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, то этот ряд является рядом Тейлора этой функции по теореме единственности. При этом $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда для нахождения значения n-ой производной функции в точке x_0 используется формула $f^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!$.

<u>*Пример*</u>. Найти производную n –го порядка для функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x_0 = 0$, $n = 6$ и $n = 99$.

<u>*Решение*</u>. Разложим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sin x = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + ...$$

Коэффициент $a_6 = -\dfrac{1}{7!}$, где $f^{(6)}(0) = -\dfrac{1}{7!}6! = -\dfrac{1}{7}$. Коэффициенты при нечетных степенях x в данном разложении равны нулю, в частности $a_{99} = 0$ и, тогда $f^{(99)}(0) = 0$.

Применение теории рядов к решению линейных дифференциальных уравнений

Одним из методов решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является применение теории рядов. Данный метод использует известное утверждение из теории дифференциальных уравнений.

<u>*Теорема.*</u> Если все коэффициенты и правая часть линейного дифференциального уравнения *n-го* порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

разлагаются в степенные ряды в некоторой окрестности точки x_0, то решение $y(x)$ этого дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям $y(x_0) = A_0$, $y'(x_0) = A_1$,..., $y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1}$, *также разлагается в степенной ряд в указанной окрестности.*

<u>*Пример.*</u> *Р*ешить задачу Коши $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$.

<u>*Решение*</u>. Подставим в уравнение $y' = y^2 + x^3$ начальные условия. Тогда $y'(0) = y^2(0) = \dfrac{1}{4}$. Найдем вторую производную, применяя дифференцирование неявной функции $y'' = 2yy' + 3x^2$. Тогда $y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$.

Аналогично,

$y''' = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x$,

$y'''(0) = 2(y'(0))^2 + 2y(0)\cdot y''(0) = 2\frac{1}{4^2} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

$y^{(4)} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' + 6 = 6y'y'' + 2yy''' + 6$,

$y^{(4)}(0) = 6y'(0)\cdot y''(0) + 2y(0)\cdot y'''(0) + 6 = 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8} + 6 = \frac{6}{16} + \frac{6}{16} + 6 =$

$= \frac{12}{16} + 6 = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$ и т.д.

Поскольку решение уравнения ищем в виде ряда

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots,$$

то, подставляя найденные коэффициенты, получим ответ

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 + \frac{27}{4\cdot 4!}x^4 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \ldots$$

Обратим внимание на то, что исходное дифференциальное уравнение не решается в квадратурах. В примере приведен один из двух методов решения задачи Коши с помощью теории рядов.

4. Ряды Фурье

При решении многих технических задач приходится иметь дело с периодическими процессами, для описания которых требуются периодические функции. Простейшей периодической функцией периода 2π является функция $\sin(x+\alpha)$. При сложении периодических функций $\sin(x+\alpha_1)$, $\sin(2x+\alpha_2)$, … , $\sin(nx+\alpha_n)$, периоды которых равны соответственно $2\pi, \pi, \dots, \frac{2\pi}{n}$, получим периодическую функцию с периодом 2π. Естественно возникает обратный вопрос: можно ли заданную периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π представить в виде суммы конечного или бесконечного числа простейших периодических функций вида $\sin(nx+\alpha_n)$:

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\alpha_n) \ ?$$

Постоянное слагаемое A_0 можно считать периодической функцией с любым периодом, в том числе и с периодом 2π.

В механике функция $\sin(nx+\alpha_n)$ описывает простейшее гармоническое колебательное движение. Представление периодической функции $f(x)$ в виде суммы простейших периодических функций можно рассматривать как разложение сложного колебания на отдельные гармонические колебания. Функции вида $\sin(nx+\alpha_n)$, входящие в состав разложения периодической функции $f(x)$, называются гармоническими составляющими этой функции или просто гармониками. Пользуясь тригонометрическим тождеством $\sin(nx+\alpha_n)=\sin\alpha_n\cdot\cos nx+\cos\alpha_n\cdot\sin nx$, и обозначая $A_n\cdot\sin\alpha_n=a_n$, $A_n\cdot\cos\alpha_n=b_n$, разложение периодической функции $f(x)$ можно переписать в виде

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,. \qquad (1)$$

Тригонометрический ряд Фурье. Коэффициенты Фурье

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π и является непрерывной или кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi,\pi]$. Напомним, что функция называется кусочно-непрерывной на отрезке, если она непрерывна во всех точках этого отрезка за исключением конечного числа точек, в которых функция терпит разрыв первого рода, т.е. в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции, не равные друг другу.

Предполагая, что $f(x)$ представляется в виде суммы простейших тригонометрических функций, найдем коэффициенты ряда (1). С этой целью проинтегрируем обе части равенства (1) на отрезке $[-\pi,\pi]$, что оправдано, например, в случае равномерной сходимости на этом отрезке функционального ряда, стоящего в правой части равенства (1). Воспользуемся тем, что $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx=\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx=-\left.\frac{\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi}=0$.

Тогда $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=A_0\cdot 2\pi$, откуда $A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$.

Для вычисления коэффициентов a_n умножим обе части равенства (1) на $\cos nx$ и проинтегрируем на отрезке $[-\pi,\pi]$. Пользуясь тем, что

$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cdot\cos(nx)dx = 0$, если $k \neq n$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cdot\cos(nx)dx = 0$, для любых k и n, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2nx)}{2}dx = \pi$, если $n \neq 0$, получим $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \pi \cdot a_n$,

откуда $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, $(n = 1,2,3,\ldots)$.

Аналогично $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$, $(n = 1,2,3,\ldots)$.

Чтобы формулы для коэффициентов выглядели единообразно, обозначим: $a_0 = 2A_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Итак, для любой функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, можно вычислить коэффициенты

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad (n = 0,1,2,3,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad (n = 1,2,3,\ldots), \tag{2}$$

которые называются *коэффициентами Фурье* этой функции, и поставить в соответствие этой функции ряд

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)), \tag{3}$$

который называется *тригонометрическим рядом Фурье* этой функции.

Определение. Система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots ,$$

на основе которой построен тригонометрический ряд Фурье, называется *основной тригонометрической* системой функций.

Эта система на отрезке $[-\pi, \pi]$ обладает свойством ортогональности: интеграл от произведения любых двух функций этой системы на отрезке $[-\pi, \pi]$ равен нулю.

Сходимость ряда Фурье

Предполагая, что функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поставим этой функции в соответствие ее тригонометрический ряд Фурье. Предположим теперь, что функция является кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это означает, отрезок $[-\pi, \pi]$ можно разделить на конечное число отрезков, внутри которых функция дифференцируема, а на концах отрезков имеет не только конечные предельные значения, но и односторонние производные при условии замены на концах этих отрезков значений функции на соответствующие предельные значения.

Теорема Дирихле устанавливает условия сходимости тригонометрического ряда Фурье и связь между значением самой функции и суммой ее тригонометрического ряда Фурье. Сформулируем теорему Дирихле без доказательства. В формулировке теоремы используем выражения $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ для обозначения односторонних пределов функции $f(x)$ при условии, что x стремится к x_0 слева и справа соответственно.

Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится в каждой точке отрезка $[-\pi, \pi]$, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет следующим условиям.

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках интервала $(-\pi; \pi)$, в которых $f(x)$ непрерывна.

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0-0) + f(x_0+0)\big)$ во всех точках разрыва функции.

3) $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big)$.

Замечание. Теорема остается справедливой в случае, когда функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-дифференцируема. Точнее, в этом случае тригонометрический ряд Фурье этой функции сходится на всей числовой оси, и сумма $S(x)$ этого ряда удовлетворяет условиям:

1) $S(x_0) = f(x_0)$ во всех точках прямой $(-\infty; +\infty)$, в которых $f(x)$ непрерывна;

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0-0) + f(x_0+0)\big)$ во всех точках разрыва функции.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ периода 2π, заданную следующим образом $f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$ Обосновать сходимость ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.

Решение. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx\right) = \frac{3}{2}\pi\,,\qquad \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}\pi\,,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cdot\cos(nx)dx\right) = \\ = \frac{1}{\pi n^2}(1-\cos(n\pi)) = \frac{1}{\pi n^2}(1-(-1)^n)\,.$$

Если $n = 2k$ - четное число, то $a_n = a_{2k} = 0$.

Если $n = 2k+1$ - нечетное число, то $a_n = a_{2k+1} = \dfrac{2}{\pi(2k+1)^2}$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cdot\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cdot\sin(nx)dx\right) = \frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n}{n}\,.$$

Тригонометрический ряд Фурье $S(x)$, соответствующий данной функции, имеет вид

$$f(x) \to S(x) = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) - \\ -\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right)\,.$$

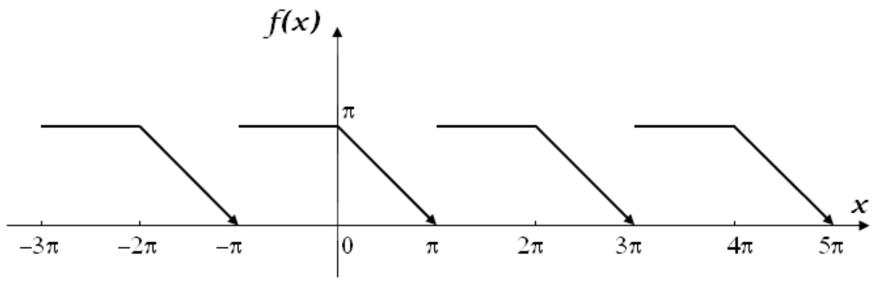
Поскольку данная функция непрерывна во всех внутренних точках отрезка $[-\pi, \pi]$, то согласно теореме Дирихле для всех $x \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство $f(x) = S(x)$. Например, полагая $x = 0$, получим

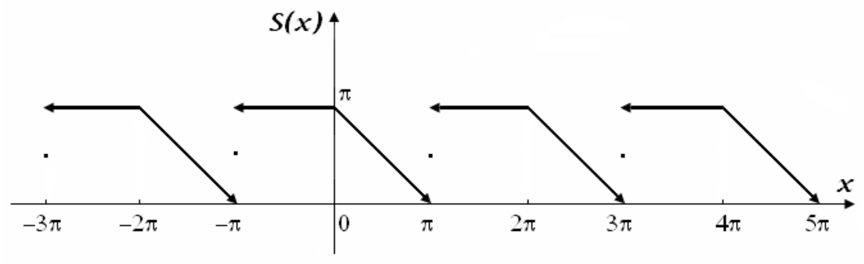
$$\pi = \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) \qquad \text{или} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

На концах отрезка $[-\pi, \pi]$ сумма ряда Фурье имеет следующее значение:

$$S(\pm\pi) = \frac{1}{2}\big(f(-\pi+0) + f(\pi-0)\big) = \frac{1}{2}\pi\,.$$

На рисунке показаны графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.





Сходимость в среднем ряда Фурье. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и ставится задача о наилучшем приближении этой функции с помощью другой функции $g(x)$ из определенного класса функций, определенных на этом же отрезке. Если требуется обеспечить близость функций во всех точках отрезка, то в качестве критерия близости рассматривается величина, равная $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|f(x)-g(x)\right|$, и функция $g(x)$ выбирается так, чтобы эта величина принимала наименьшее возможное значение. В этом случае обеспечивается равномерная на всем отрезке близость функций.

Если требуется обеспечить близость функций на отрезке в среднем, то в качестве критерия близости рассматривают величину, равную

$$\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx .$$

Для достижения наилучшего приближения в среднем требуется минимизировать эту величину.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда согласно теореме Дирихле тригонометрический ряд Фурье этой функции во всех точках непрерывности сходится к этой функции. Можно показать, что величина $\delta_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-S_n(x)\right)^2 dx$, характеризующая отклонение в среднем частичной суммы $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье от кусочно-дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, стремится к нулю при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$.

Это означает, что тригонометрический ряд Фурье сходится в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ к своей сумме, а коэффициенты Фурье функции $f(x)$ удовлетворяют равенству

$$\frac{a_0^{\,2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2}+b_n^{\,2})=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx ,$$

которое называется *<u>равенством Парсеваля</u>*.

Равенство Парсеваля является аналогом теоремы Пифагора в бесконечно-мерном пространстве функций, кусочно-дифференцируемых на отрезке $[-\pi, \pi]$. Действительно, если считать, что квадрат «длины функции» в этом пространстве равен $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, что основная тригонометрическая система функций является базисом этого пространства, а ряд Фурье – разложением функции по этому базису, то согласно равенству Парсеваля квадрат «длины функции» равен сумме квадратов ее координат.

В частном случае, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет кусочно-непрерывную производную на этом отрезке, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится во всех точках этого отрезка к функции $f(x)$, причем равномерно.

Представление рядом Фурье функции произвольного периода

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$, или $f(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом $2l$ и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-l, l]$. Сделав замену переменной $x = t\dfrac{l}{\pi}$, получим $f(x) = f\left(t\dfrac{l}{\pi}\right) = g(t)$.

Если функция $f(x)$ была определена на отрезке $[-l, l]$, то функция $g(t)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет на этом отрезке условиям теоремы Дирихле. Раскладывая в ряд Фурье функцию $g(t)$ и возвращаясь к исходной функции, получим для нее следующее представление рядом Фурье

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (4)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots),$$

$$(5)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad (n = 1,2,3,\ldots).$$

Теорема Дирихле остается в силе с той лишь разницей, что в случае произвольного отрезка $[-l, l]$ точки $x = \pm\pi$ заменяются на точки $x = \pm l$:

$$S(l) = S(-l) = \frac{1}{2}\big(f(-l+0) + f(l-0)\big).$$

Равенство Парсеваля принимает вид $\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Легко убедиться в том, что если кусочно-непрерывная функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx .$$

Действительно, сделав замену $t = -x$, вычислим

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{l} f(t)dt = \int_{0}^{l} f(x)dx .$$

Аналогично устанавливается, что в случае нечетной функции $f(x)$

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{l}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = -\int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(t)dt = 0 .$$

Предположим теперь, что кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-l, l]$, является четной. Тогда произведение $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ также является четной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ - нечетной. Вычислим коэффициенты Фурье четной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx , \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0 , \quad (n = 1,\ 2,\ 3,...).$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье <u>*четной*</u> функции содержит только косинусы: $f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}$,

а равенство Парсеваля приобретает вид $\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

Если функция $f(x)$ является <u>*нечетной*</u>, то произведение $f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}$ также является нечетной функцией, а произведение $f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}$ - четной. Вычислим коэффициенты Фурье нечетной функции:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = 0, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,...),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,...).$$

Тригонометрический ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы: $f(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$,

а равенство Парсеваля приобретает вид $\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2$.

Разложение функций, заданных на полупериоде, в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам

Пусть функция $f(x)$ определена и кусочно-дифференцируема на отрезке $[0, l]$. Желая получить разложение этой функции в ряд Фурье, доопределим ее на промежутке $[-l, 0)$ произвольным образом, сохраняя лишь требование кусочной дифференцируемости. Это дает возможность получать различные разложения одной и той же функции в тригонометрические ряды Фурье на отрезке $[0, l]$.

Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим четную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только косинусы.

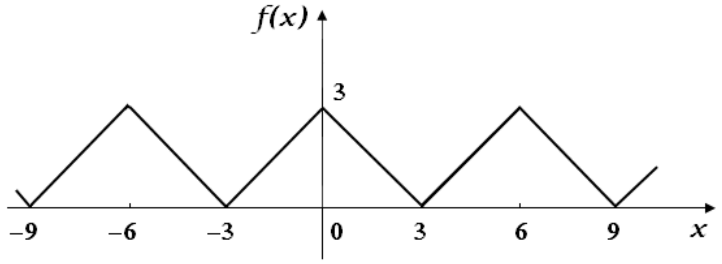
Если определяя функцию на промежутке $[-l, 0)$, будем полагать, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in (0, l]$, то получим нечетную функцию, тригонометрический ряд Фурье которой будет содержать только синусы.

Пример. Разложить функцию $f(x) = 3 - x$, заданную на отрезке $[0, 3]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам и в тригонометрический ряд Фурье по синусам. Обосновать сходимость каждого ряда Фурье. Нарисовать графики суммы для каждого ряда Фурье.

Решение.

1) Разложение по косинусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-3, 0)$ четным образом и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.



Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$a_0=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)dx=3,\qquad \frac{a_0}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\frac{3}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3+\frac{3}{n\pi}\int_0^3\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^3=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi)=\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)=$$

$$=\begin{cases}0, & \textit{если } n=2k-\textit{четное число},\ k=1,2,3,\ldots,\\ \dfrac{12}{(2k+1)^2\pi^2}, & \textit{если } n=2k+1-\textit{нечетное число},\ k=0,1,2,3,\ldots.\end{cases}$$

Так как рассматриваемая функция является непрерывной всюду, то сумма ее тригонометрического ряда Фурье равна данной функции при всех x $f(x)=\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi(2k+1)x}{3}}{(2k+1)^2}$.

Полагая в этом равенстве $x=0$, получим

$$3=\frac{3}{2}+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\quad\text{или}\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Выпишем для этого разложения равенство Парсеваля. С этой целью вычислим интеграл

$$\frac{2}{3}\int_0^3(3-x)^2dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_0^3=\frac{2}{9}\cdot 27=6.$$

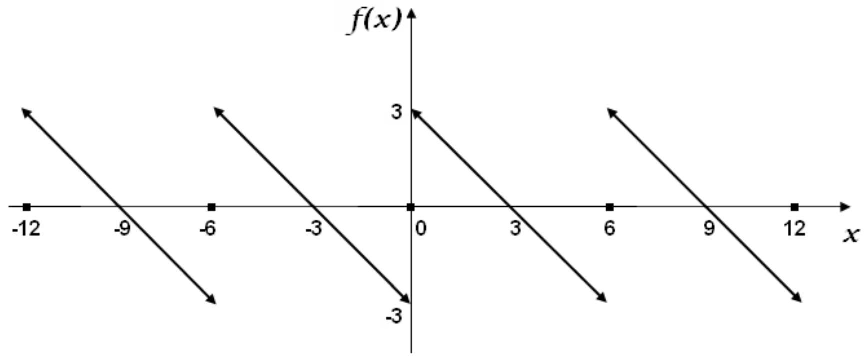
Равенство Парсеваля принимает вид

$$6=\frac{9}{2}+\frac{144}{\pi^4}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4},\qquad\text{откуда}\qquad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Итак, с помощью разложений функций в тригонометрические ряды Фурье, можно получать значения сумм некоторых числовых рядов.

2) Разложение по синусам

Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $[-3, 0)$ нечетным образом, изменим значение функции при $x = 0$, полагая $f(0) = 0$ и продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом, равным 6.



Согласно теореме Дирихле сумма тригонометрического ряда Фурье такой функции будет равна функции при всех x. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (3-x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left((3-x)\cdot\left(-\frac{3}{n\pi}\right)\cdot\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3 - \frac{3}{n\pi}\int_0^3 \cos\frac{n\pi x}{3}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{n\pi} - \frac{9}{n^2\pi^2}\cdot\sin\frac{n\pi x}{3}\bigg|_0^3\right) = \frac{6}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

$f(x) = \dfrac{6}{\pi}\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{n}$. Полагая в этой формуле $x = \dfrac{3}{2}$, получим

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} .$$

Учитывая, что $\sin\dfrac{n\pi}{2} = \sin k\pi = 0$, если $n = 2k$ - четное число и что $\sin\dfrac{n\pi}{2} = \sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right) = (-1)^k$, если $n = 2k+1$ - нечетное число, перепишем полученный результат в виде: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

5. Интеграл Фурье

Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ задана на всей числовой прямой и не является периодической. Предположим, что $f(x)$ абсолютно интегрируема, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(f(x)| dx = M < \infty$.

Разложим $f(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega_k x) + b_k \sin(\omega_k x)\,. \qquad (1)$$

Здесь $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$, а коэффициенты определяются по формуле Эйлера-Фурье

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt\,, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos(\omega_k t)dt, \qquad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin(\omega_k t)dt\,. \qquad (2)$$

Подставляя эти значения в ряд (1), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\left[\cos(\omega_k t)\cos(\omega_k x) + \sin(\omega_k t)\sin(\omega_k x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x). \qquad (3)$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $l \to \infty$.

Первое слагаемое в правой части (3) стремится к нулю при $l \to \infty$, поскольку

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)dt \le \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} |f(t)|dt < \frac{M}{2l} \to 0\,.$$

Второе слагаемое в правой части (3) можно рассматривать как интегральную сумму для интеграла $\int\limits_{0}^{\infty} g(\lambda)d\lambda$ от функции

$g_l(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$, что можно показать следующим образом.

Пусть $\lambda_k = \omega_k = \frac{\pi}{l}k,\ \lambda_k = \Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$. Тогда

$$\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} g_l(\lambda_k)\Delta\lambda_k\,.$$

Формальный предельный переход в (3) при $l \to \infty$ приводит к равенству

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt \qquad (4)$$

Это равенство называется *формулой Фурье*, а интеграл в правой части равенства (4) – *интегралом Фурье*. Интеграл Фурье будем обозначать через $\Phi(x)$, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt .$$

Положим $\quad a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt, \qquad b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt .$

Формулу Фурье можно записать в виде

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x + b(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda . \qquad (5)$$

При такой форме записи видна аналогия с рядом Фурье: представлению функции в виде суммы гармонических колебаний по натуральному параметру соответствует интеграл по непрерывному параметру.

Приведенные рассуждения, безусловно, не являются доказательством, а скорее их нужно рассматривать как некоторые наводящие соображения (которые и привели Фурье к интегральной формуле). Точные формулировки приводятся далее.

Формула Фурье, преобразование Фурье: основные понятия

Теорема Фурье. Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом конечном интервале не более конечного числа точек разрыва, и абсолютно интегрируема на всей прямой. Тогда в каждой точке дифференцируемости $f(x)$ справедлива формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\lambda(\tau-x)d\tau .$$

В точках разрыва функции $f(x)$ при условии существования односторонних производных интеграл Фурье равен среднему арифметическому односторонних пределов функции

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \qquad (6)$$

Формулу Фурье можно переписать в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(t-x)} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt \qquad (7)$$

Формулу Фурье (7) принято разбивать на два равенства

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} f(t)dt, \qquad (8)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \qquad (9)$$

Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется *преобразованием Фурье* функции f (или образом преобразования Фурье) и обозначается $\hat{f}(\lambda)=F(f)$. Здесь F - *оператор Фурье*, применяемый к функции f: $F: f\to\hat{f}$. Формулу (9) называют *обратным преобразованием Фурье* и пишут

$$f(x)=F^{-1}(\hat{f}). \qquad (10)$$

Замечание. Часто преобразование Фурье определяют равенством $\hat{f}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda t}f(t)dt,$ при этом формула (9) обратного преобразования Фурье принимает вид $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$.

Преобразование Фурье по существу является функцией, описывающей амплитуду и фазу каждой гармоники, соответствующей определенной частоте. Отметим, что при внешнем сходстве формул (8) и (9), они по существу различны. Первая – это определение, а второе – теорема. Кроме того, в (9) интеграл понимается в смысле главного значения, т.е.

$$f(x)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-A}^{A}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

В случае периодической функции $f(x)$ разложение в ряд Фурье состоит из отдельных гармоник с частотами $\omega_n=\dfrac{\pi}{l}n$. Зависимость амплитуды этих гармоник от частоты называется *дискретным амплитудным спектром* функции. Если функция $f(x)$ не является периодической, то роль ряда Фурье играет интеграл Фурье (9), а *амплитудным спектром* (*непрерывным*) называется функция $A(\lambda)=|\hat{f}(\lambda)|$ (с точностью до множителя $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$), λ при этом называется частотой. Функция $\hat{f}(\lambda)$ называется спектром (спектральной функцией) сигнала $f(x)$, функция $\varphi(\lambda)=\arg\hat{f}(\lambda)$ (с точностью до знака) называется *фазовым спектром.*

<u>*Пример*</u>. Емкость $C=1\ \phi$, имеющая электрический заряд $q=1\ k$ в момент времени $t=0$ начинает разряжаться через сопротивление $r=1\ ом$. Ток изменяется по закону $f(t)=\begin{cases}e^{-t},\ t\ge 0,\\ 0,\ t<0.\end{cases}$ Найти преобразование Фурье функции $f(t)$, амплитудный спектр и представить $f(t)$ интегралом Фурье в комплексной форме.

<u>*Решение*</u>. Преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda t}f(t)dt\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-i\lambda t}e^{-t}dt=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left.\frac{e^{-t(i\lambda+1)}}{(i\lambda+1)}\right|_{0}^{+\infty}\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\lambda}.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t(i\lambda+1)}=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\left[\cos t\lambda-i\sin t\lambda\right]=0.$$

Амплитудный спектр $A(\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

По формуле Фурье в точках непрерывности $f(t)$, т.е. при $t\neq 0$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{it\lambda}d\lambda}{1+i\lambda}$$

При $t=0$ интеграл в правой части равен $1/2$.

Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Косинус- и синус- преобразования Фурье

Формулу Фурье перепишем в следующем виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos(\lambda x)d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin(\lambda x)d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt \qquad (11)$$

<u>*Случай четной функции*</u>: $f(-x)=f(x)$.

Перепишем первый внутренний интеграл в формуле (11) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt=\int_{-\infty}^{0}f(t)\cos(\lambda t)dt+\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt.$$

В силу четности функции $f(x)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt=2\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt=0.$$

Формула Фурье для четной функции примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\cos(\lambda x)d\lambda\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt \qquad (12)$$

Положим $\hat{f}_c(\lambda)=a(\lambda)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\displaystyle\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt$ (13)

Тогда равенство (12) перепишется в виде

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda\ . \qquad (14)$$

Формула (13) называется *косинус- преобразованием Фурье*, а формула (14) – *обратным косинус- преобразованием.*

<u>*Случай нечетной функции:*</u> $f(-x)=-f(x)$.

Аналогично предыдущему случаю нетрудно проверить, что интегральная формула Фурье примет вид

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin(\lambda x)d\lambda\int_0^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt\,. \qquad (15)$$

В этом случае равенство

$$\hat{f}_s(\lambda)=b(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt$$

(16)

определяет прямое *синус- преобразование Фурье*, а равенство

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\hat{f}_s(\lambda)\sin(\lambda x)dx \qquad (17)$$

задает *обратное синус- преобразование Фурье*.

Таким образом, имеем полную аналогию с рядом Фурье для четной и нечетной функции.

Итак, формула Фурье для *четной* функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda\,, \qquad (18)$$

Где $\hat{f}_c(\lambda)=a(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}f(t)\cos(\lambda t)dt$.

Формула Фурье для *нечетной* функции

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\hat{f}_s(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda\,, \qquad (19)$$

где $\hat{f}_s(\lambda)=b(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}f(t)\sin(\lambda t)dt$.

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $[0,+\infty)$. Доопределив функцию на интервал $(-\infty,0]$ четным или нечетным образом, получим, что её интеграл Фурье можно представить как в виде (18), так и в виде (19).

<u>*Пример*</u>. Найти косинус- преобразование Фурье для функции

$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ 0, & x>a.\end{cases}$ Представить функцию с помощью интеграла Фурье.

Решение. Считая, что $f(x)$ продолжена на всю прямую четным образом, получим $\hat{f}_c(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^a \cos\lambda t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}$.

По формуле (18) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\hat{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)d\lambda=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}\cos(\lambda x)d\lambda$.

В точке $x=0$ функция $f(x)$ (точнее её четное продолжение) непрерывна. Следовательно, $f(0)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda$.

Отсюда, в частности, получаем $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda a}{\lambda}d\lambda=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулу Фурье можно использовать для вычисления интегралов.

6. Решение уравнения колебаний струны методом Фурье

Метод Фурье широко используется при решении многих задач математической физики. Проиллюстрируем основные идеи этого метода на примере решения задачи о колебаниях закрепленной струны.

Будем рассматривать свободные, малые, поперечные колебания струны, закрепленной в точке $x=0$ и $x=l$ оси x, с положением равновесия вдоль оси x. Пусть $u(x,t)$ - отклонение точки струны с абсциссой x в момент времени t. В математической физике для изучения функции $u(x,t)$, описывающей форму струны в момент времени выводится уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ где } a \text{ - некоторая константа} \qquad (1)$$

Уравнение (1) рассматривается с граничными условиями (закрепленность на концах)

$$u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0 \qquad (2)$$

Пусть начальная форма струны описывается функцией $\varphi(x)$, а начальная скорость $\psi(x)$, т.е. уравнение (1) рассматривается с начальными условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0)=\varphi(x),\\ &u_t'(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l \end{aligned} \qquad (3)$$

Первый шаг метода Фурье – решение вспомогательной задачи: найти решение уравнения (1) вида

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (4)$$

не равное тождественно нулю и удовлетворяющее граничным условиям (2). Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \qquad (5)$$

Левая часть равенства зависит только от t, правая – только от x. Отсюда вытекает, что обе части равенства равны константе. Обозначим эту константу $(-\lambda)$. Получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\begin{cases} T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0 & (6) \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 & (7) \end{cases}$$

Из (2) следует, что для уравнения (7) должны выполняться граничные условия

$$X(0) = X(l) = 0. \qquad (8)$$

Найдем сначала нетривиальные решения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8). Эта задача называется *задачей Штурма-Лиувилля*. Значения λ, при которых задача имеет решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения – *собственными функциями*.

Рассмотрим отдельно случаи $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

1) Пусть $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$.

Общее решение (7) записывается в виде

$$X(x) = C_1e^{-\mu x} + C_2e^{\mu x}.$$

Граничные условия $X(0) = X(l) = 0$ приводят к однородной системе линейных уравнений относительно C_1 и C_2 с ненулевым определителем. Следовательно, $C_1 = C_2 = 0$ и $X(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$. Общее решение (7)

$$X(x) = C_1 + C_2X.$$

Граничные условия приводят к системе $C_1 = 0$, $C_1 + C_2l = 0$. Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и, следовательно, $X \equiv 0$.

3) Пусть $\lambda = \mu^2$, $\lambda > 0$. Общее решение (7)

$$X(x) = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x$$

Граничные условия дают

$$0 = X(0) = C_1,$$

$$0 = X(l) = C_1\cos\mu l + C_2\sin\mu l = C_2\sin\mu l.$$

Поскольку $C_2 \neq 0$, то $\sin(\varphi\cdot l) = 0$ и $\mu l = n\pi$, $n = 1,2,\ldots.$

Следовательно, нетривиальное решение задачи Штурма-Лиувилля (7)-(8) возможно только при $\lambda = \lambda_m = \left(\frac{\pi m}{l}\right)^2$, $n = 1,2,....$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1,2,....$$

При $\lambda = \lambda_m$ общее решение уравнения (6) запишется в виде

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}.$$

Таким образом, функции $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых A_n и B_n.

В силу линейности и однородности уравнения (1) ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (9)$$

в случае его сходимости и возможности дважды дифференцирования по x и t также является решением (1) и удовлетворяет граничным условиям (2).

Определим коэффициенты A_n и B_n так, чтобы выполнялись начальные условия (3). Дифференцируя ряд почленно, получим

$$u'_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left(-A_n \sin\frac{n\pi a t}{l} + B_n \cos\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (10)$$

Полагая в (9) и (10) $t = 0$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (11)$$

Равенства (11) суть разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, l]$. Следовательно,

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \qquad (12)$$

Таким образом, равенство (9) дает решение исходной задачи (1)-(3), если коэффициенты A_n, B_n определены в соответствии с (12).

Рассмотрим частный случай колебаний струны без начальной скорости, т.е. $\psi(x) = 0$. Поскольку $B_n = 0$, имеем

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\ =$$

$$=\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n\,\frac{1}{2}\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x-at)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+at)\right]=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big).$$

Таким образом, решение представляется в виде полусуммы двух разбегающихся волн. Под $\varphi(x)$ здесь понимается продолжение исходной функции, определяющей начальную форму на отрезке $[0,l]$, сначала – нечетное на $[-l,l]$, а затем периодическое на всю прямую.

Заключение

Теория рядов имеет широкое применения в различных дисциплинах, используется при решении прикладных задач.

В математическом анализе степенные ряды применяются для вычисления предела функции, при выполнении приближенных вычислений, вычислении значений производной функции в точке, нахождении суммы ряда. Теория рядов используется в теории функций комплексной переменной. В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью рядов решают задачу Коши. Для математической физики методом Фурье решают уравнения колебаний струны, теплопроводности и др.

В теории вероятностей и в теории случайных процессов к рядам обращаются при рассмотрении вопросов нахождения характеристик случайных величин, нахождении производящей функции, для спектрального разложения стационарных случайных процессов и др.

В курсе радиотехники с помощью рядов Фурье изучаются периодические сигналы, строятся амплитудные и фазовый спектры. На основе интеграла и преобразования Фурье изучаются спектры непериодических сигналов.

Преобразование Фурье – это математическая основа теории автоматического управления. При разработке прикладных проблем курсового и дипломного проектирования также применяют данную теорию (вопросы надежности разрабатываемой системы, вопросы анализа функционирования объекта и др.).

Для более глубокого изучения вопросов решения задач на основе теории рядов в различных дисциплинах рекомендуется дополнительная литература.

Дополнительная литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Издательство Московского Университета, 1999.

2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 4-е издание. М.: Эдиториал, УРСС, 2000.

3. Коренев В.Г. Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1971.

4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000.

5. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. М.: Энергия, 1969.

6. Харкевич А.А. Основы радиотехники. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

7. Игнатов В. А. Теория информации и передачи сигналов. М: Радио и связь, 1991.

8. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 2008.

9. Воронов А.А., Ким Д.П., Лохин В.М., Макаров И.М., Попович П.Н., Рахманкулов В.З. Теория автоматического управления. М.: Высшая школа, 1986.

10. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т1. Линейные системы. М.: ФМЛ, 2003.

11. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Физматлит, 1996.

12. Малыгина О.А. Формирование основ профессиональной мобильности в процессе обучения высшей математике. М.: URSS, 2010.

13. Malygina O.A., Rudenskaya I.N., Shuhov A.G. Generalized NPS-Approach for Education on Quality Rate// Progress in Analysis/ Procedings of the 8-th Congress of the ISAAC 2012 vol.3 М.: РУДН, 2012. С. 133-141.

Содержание