

МИРЭА - РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И. М. АКСЕНЕНКОВА, Т.Р. ИГОНИНА,
О.А. МАЛЫГИНА, А.В. ТАТАРИНЦЕВ, Н.С. ЧЕКАЛКИН

РЕДАКТОР: Н.С. ЧЕКАЛКИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3 СЕМЕСТР

Учебно- методическое пособие

Для студентов очной формы обучения
института ИТ

Москва
МИРЭА
2019

Утверждено редакционно-издательским советом Московского технологического университета в качестве учебного – методического пособия для студентов

Подготовлено на кафедре Высшей математики -2

Рецензенты: Бобылева Т.Н., к.ф-м.н.
 Приходько В.Ю., д.ф-м.н.

И. М. Аксененкова, Т.Р. Игониная, О.А. Малыгина, А.В. Татаринцев,
Н.С. Чекалкин

Математический анализ, 3 семестр: учебно- методическое пособие /
Аксененкова И. М., Игониная Т.Р., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С.,
А.В. Татаринцев М.: МИРЭА, 2019, 139 с.

Учебно-методическое пособие по курсу "Математический анализ" (3 семестр) предназначено для студентов Московского технологического университета, института ИТ (МИРЭА). Пособие включает следующие разделы: числовые и функциональные ряды, ряды Тейлора и Фурье, приложения рядов; функции комплексного переменного, аналитические функции, теория вычетов и ее приложения. Материал пособия можно использовать при изучении курса дифференциальных уравнений, теории вероятностей и случайных процессов, при изучении ряда специальных и общепрофессиональных дисциплин.

© Аксененкова И.М. Игониная Т.Р.
Малыгина О.А. А.В. Татаринцев Че-
калкин Н.С., 2019
© МИРЭА, 2019

Введение

Пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 Московского технологического университета (МИРЭА) для студентов очной формы обучения института Информационных технологий (ИИТ). Пособие содержит список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена, перечень рекомендуемой литературы, варианты контрольных работ по курсу, образец экзаменационного билета, типовой расчет.

Основное содержание курса математического анализа 3-го семестра составляют теория рядов и теория функций комплексного переменного (ТФКП). В программу включены следующие разделы: числовые ряды (понятие сходимости ряда, признаки сходимости рядов с положительными членами, знакочередующийся ряд, абсолютная и условная сходимость, теорема Лейбница, действия с рядами); функциональные ряды (область сходимости ряда, равномерная сходимость, теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости, непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование функционального ряда, степенной ряд, ряд Тейлора); ряд Фурье; аналитические функции и их свойства, ряды Тейлора и Лорана для функции комплексного переменного, теория вычетов и ее приложения (вычисление контурных интегралов по основной теореме о вычетах, вычисление несобственных интегралов).

Данное пособие имеет следующую структуру. Оно состоит из трех частей. **Часть 1** – это основные типы задач для подготовки к сдаче контрольных работ и экзамена. Рекомендуется прорешать все задачи этой части пособия. Список задач первой части шире списка типовых задач второй части. На основе первой части у студента формируются представления о разной сложности заданий курса математического анализа. **Часть 2** – это задачи типового расчета, студент выполняет только свой вариант. **Часть 3** – теоретический материал и примеры решения типовых задач курса. От студента требуется успешное овладение материалом, т.е. необходимо знать основные определения, формулировки и доказательства основных теорем курса, а также уметь решать типовые задачи.

Методические указания

В течение 3-го семестра по курсу математического анализа проводятся две контрольные работы и выполняется типовая расчет.

Приведем примерные варианты контрольных работ.

Примерный вариант контрольной работы по разделу «Теория рядов»

1. Исследовать ряд на сходимость, ответ обосновать:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} 3n^2 \cdot \left(e^{\frac{5}{n^2}} - 1 \right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 3}{4n^9 + 1}$$

2. Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость,

$$\text{ответ обосновать: а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \sin^6\left(\frac{1}{3n}\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4}{8n+3}$$

3. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{n(\ln n)^4}$. Исследовать сходимость на концах интервала.

4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Указать область сходимости полученного степенного ряда.

$$f(x) = \frac{x-3}{5x+7}, \quad x_0 = 3$$

Примерный вариант контрольной работы по разделу «Теория функции комплексного переменного»

1. Вычислить все значения $(3 - i\sqrt{3})^{12i}$.

2. Решить уравнение $\sin 2z = 2$. Ответы изобразить на комплексной плоскости.

3. Исследовать функцию $f(z) = e^{iz} + 3z - 5i$ на аналитичность.

4. Функцию $f(z) = \frac{4}{2z+5}$ разложить в ряд Лорана в области $|z| > 5/2$.

5. Указать особые точки функции, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$\text{а) } f(z) = (z-5)^3 \cdot e^{\frac{8}{z-5}}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^{9z} - 1}{z^2(z^2 + 16)}$$

Типовой расчет. В типовой расчет входят задачи по теории рядов и теории функции комплексной переменной. Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент подробно описывает решение каждой задачи, объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. *Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием допуска студента на экзамен.*

По итогам обучения на основе учебного плана проводится экзамен.

Примерный вариант экзаменационного билета

1. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 15^{-n} \left(\frac{n+3}{n} \right)^{n^2}$ на сходимость, ответ обосновать.
2. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$. Исследовать сходимость ряда на концах интервала.
3. Разложить функцию $f(x) = \ln(12x+9)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$. Указать область сходимости ряда.
4. Разложить функцию $f(x) = 4x$, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$, в ряд Фурье. Обосновать сходимость ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.
5. Решить уравнение $e^{2z} - 3e^z - 4 = 0$.
6. Установить, является ли функция аналитической $f(z) = z \cdot \operatorname{Im}(2z + 5z - 3i)$.
7. Указать особые точки функции $f(z) = \frac{\cos 9z - 1}{z^2(z + 4i)}$, их тип, найти вычеты в особых точках.
8. Вычислить $\int_L (z-2)^5 \cdot e^{\frac{9}{z-2}} dz$, $L: |z-1|=2$.
9. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{5}{(x^2+16)^2} dx$.
10. Теоретический вопрос (из списка теоретических вопросов).

Замечание: количество задач билета может быть изменено решением методической комиссии кафедры при обязательном утверждении на заседании кафедры.

Теоретические вопросы по курсу

1. Определение числового ряда, его сходимости. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда. Признаки сравнения рядов с положительными членами.

2. Признак Даламбера. Радиальный и интегральный признаки Коши сходимости рядов с положительными членами.

3. Определение знакопеременного числового ряда. Определение абсолютной и условной сходимости. Признак Лейбница сходимости знакопеременного ряда.

4. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Свойства условно сходящихся рядов. Примеры.

5. Определение функционального ряда, его области сходимости. Равномерная сходимость функционального ряда. Теорема Вейерштрасса.

6. Теорема о непрерывности суммы функционального ряда. Теорема о почленном интегрировании функционального ряда. Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда.

7. Определение степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов.

8. Критерий разложимости функции в степенной ряд. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Разложения элементарных функций в ряд Маклорена (e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$).

9. Ряд Фурье по тригонометрической системе функций. Коэффициенты Фурье. Разложение в ряд Фурье четной и нечетной функции. Примеры.

10. Понятие функции комплексного переменного. Основные элементарные функции комплексного переменного, их свойства. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции комплексного переменного.

11. Понятие аналитической функции. Условия Коши-Римана. Примеры. Определение интеграла функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой кривой, свойства. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области.

12. Ряд Тейлора аналитической функции. Ряд Лорана аналитической функции. Теорема о разложении функции в ряд Лорана. Область сходимости. Примеры разложения в ряд Лорана.

13. Изолированные особые точки (и.о.т.). Классификация и.о.т. по главной части ряда Лорана и на основе поведения функции в окрестности и.о.т. Примеры.

14. Вычет аналитической функции в и.о.т. Теорема о нахождении вычета по ряду Лорана. Формулы вычисления вычетов в простом и кратном полюсе. Примеры.

15. Основная теорема о вычетах. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов. Вычисление несобственных интегралов по прямой и полупрямой. Примеры.

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / - Люберцы: Юрайт, 2016.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Том 1 – М.: Книга по Требованию, 2013.
4. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I, 2. — 6-е изд, дополн.— М.: МЦНМО, 2012.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. М.: Физматлит. – 2014.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. Т.1. - URSS. - 2014.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия.Т.2. - URSS. - 2017.
8. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости. Т.3. - URSS. – 2017.

9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика: Кратные и криволинейные интегралы, векторный анализ, функции комплексного переменного, дифференциальные уравнения с частными производными. Т.4. Изд. 4. - URSS. – 2017.

10. Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Шухов А.Г., Чекалкин Н.С. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: МИРЭА. - 2015.

Дополнительная литература:

11. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А. и др. Математический анализ. 1 семестр. Учебно-методическое пособие для студентов факультетов РТС, ИТ, Электроники. – М.: МИРЭА.- 2013.

12. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А. и др. Математический анализ. 2 семестр. Учебно-методическое пособие для студентов факультетов РТС и Электроники. – М.: МИРЭА.- 2011.

13. Математический анализ, 3 семестр. Контрольные задания для студентов очного обучения факультетов РТС, ИТ, РТС. М.: МИРЭА, 2012.

14. Математический анализ, 4 семестр. Учебно-методическое пособие для студентов очного обучения факультетов РТС, ИТ, РТС. М.: МИРЭА, 2012.

15. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., Мир, 2009.

16. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Том 4. Функции комплексного переменного (теория и практика). М., URSS, 1999.

ЧАСТЬ 1

Основные типы задач для подготовки к контрольным работам и экзамену

В этой части пособия приведены задания для подготовки к успешной сдаче контрольных работ и экзамена. Рекомендуется выполнить все задания. Материал части 1 можно рассматривать как задачник по математическому анализу 3-го семестра для самостоятельной работы студентов очного отделения института ИТ.

Основные определения и теоремы сформулированы в части 3. Там же описаны решения типовых задач курса.

Задачи по теории рядов

Задача №1.1. Найти сумму S числового ряда.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{7^n}$
7	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n^2-1)}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{(n+16)(n+17)}$

Задача №1.2. Установить расходимость числового ряда на основе необходимого условия сходимости.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin\left(\frac{3}{5n+4}\right)$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (e^{\frac{8}{n^3}} - 1)$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{n^2+5}\right)$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(\frac{n}{n+100}\right)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + 2n + 1}{100n^2 + 17}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{5n+6}}\right)$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}\right)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \sqrt[3]{\frac{2n+5}{3n+7}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{3n+1}{n+10}\right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+1}{5n^2-8}\right)^{n^2+6n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{\sqrt{4n^2+2n+1}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\frac{3n+1}{10n+11}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 (e^{\frac{9}{n^5+2}} - 1)$

Задача №1.3. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признаков сравнения.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{n^5+15}\right)$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 4^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{4n^3 + 7} \right)^8$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 1}{3n^5 + 2}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5}{\sqrt{n^3 - 6n + 10} \cdot (3n + 1)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)(n+5)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt{n}}{2^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 4n}{2 + 3n^2}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n^6 + 5}\right)$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{4n+1}}\right)$

Задача №1.4. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе признака Даламбера.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+6)^3}{2^n}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(3n+4)^4}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{\sqrt{n^3 + 8}}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)3^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 2^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{3^n \cdot n!}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{5n^2 + n + 4}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\left(\frac{\pi}{9^n}\right)$

7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n + 1}{\sqrt{n^3 + 1}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+15)3^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^4 + 12}{13^n}$

Задача №1.5. Установить сходимость или расходимость числового ряда на основе радикального признака Коши или интегрального признака Коши.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+4} \right)^n$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+2}{4n+1} \right)^{3n}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+4} \right)^{n^2}$	10	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[5]{\ln n}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (2 \ln n + 5)^3}$
4	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$	12	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 1}{8n^2 + 5} \right)^{2n}$
6	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n \ln n (\ln \ln n)^9}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n+7} \right)^{n^2}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \arcsin^n \left(\frac{4}{n+1} \right)$
8	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{16}}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9n}{9n+4} \right)^{n^2} \cdot 12^{-n}$

Задача №1.6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость знакпеременный ряд.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \sqrt[6]{64n+3}}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-1}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n+4)}{2^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{9n^2+2n+5}}$	11	$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^6}$
4	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n \cdot \sqrt{\ln n}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{7n+1}{7n+5}\right)^{n^2}$
5	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$	13	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^4}\right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+3) \sin^8\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{\sqrt{n^5+3n+1}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9n+17}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \cdot \arcsin\left(\frac{1}{n^4+6}\right)$

Задача №1.7. Исследовать на сходимость числовой ряд, используя признаки сходимости числовых рядов.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{6n+7}{6n+4}\right)^{n^2}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)!}{(2n)!}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} (1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{8^n - n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot (7 \ln n + 4)^5}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+5)}{n+5}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{(3n+5) \cdot \sqrt[5]{32n^2+1}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1 - \cos(\frac{5}{n+2}))$

5	$\sum_{n=1}^{\infty} (3n+2)^5 (10^{\frac{9}{n^5}} - 1)$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+2}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)^2}{n(n+4)\sqrt{9n+5}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^3+2n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2) \cdot \sqrt[5]{\ln(n+2)}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+5}{n+2}\right)$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+4) \arcsin\left(\frac{1+2n}{n^4 \sqrt{4n^2+5}}\right)$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+1)^n}{3^{n^2+n}}$

Задача №1.8. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+5}\right)^{3n} (x+4)^n$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-7)^n}{\sqrt{9n^2+1}}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{n \cdot 2^n \cdot \sqrt{n+1}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3^n n \sqrt{n+1}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+10)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{n \cdot (n^2+1)}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+100)^n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x+7)^n$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n (x+1)^n$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n \left(1 - \cos\left(\frac{2}{n^4}\right)\right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n \operatorname{actg}\left(\frac{5}{n}\right)$

8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n(n+1)} (x+1)^n$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot (x+5)^n}{n^3 + 2}$
---	--	----	--

Задача №1.9. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Указать область сходимости полученного ряда.

Указание. Использовать разложения элементарных функций в степенные ряды.

1	$y = (x+4)^3 e^{-3x+5},$ $x_0 = -4$	9	$y = \frac{(x+5)^3}{8x-1}, x_0 = -5$
2	$y = (3x^2 + x + 1)e^{2x-1},$ $x_0 = 0$	10	$y = (x-5)e^{3x-4}, x_0 = 5$
3	$y = e^{-x^2+6x}, x_0 = 3$	11	$y = 6 \cdot \operatorname{ch}(5x), x_0 = 0$
4	$y = (1-x)^5 e^{-3x+4}, x_0 = 1$	12	$y = 8 \cdot \operatorname{sh}(7x), x_0 = 2$
5	$y = (x+7)^3 \operatorname{tg}(x+7),$ $x_0 = -7$	13	$y = (x+4) \ln(3-2x),$ $x_0 = -4$
6	$y = \frac{x}{4x^2+3}, x_0 = 0$	14	$y = \ln(2x^2+3x-2),$ $x_0 = 1$
7	$y = 4 \sin^2(3x^2) + 6x^7,$ $x_0 = 0$	15	$y = (x-2)^5 \operatorname{tg}(x-2),$ $x_0 = 2$
8	$y = \frac{2x-3}{x^2+5x+6}, x_0 = -1$	16	$y = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right), x_0 = -1$

Задача №1.10. Пользуясь теоремой Вейерштрасса, доказать, что функциональный ряд сходится равномерно в указанной области.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n \sqrt{n+x}}, x \in [0; +\infty)$	9	$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, x \in [0; +\infty)$
---	--	---	---

2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{x}{n}, x \in [0; \pi]$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4 + x^4}, x \in (-\infty; +\infty)$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^n + n^2 x^2}, x \in (-\infty; +\infty)$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4 + x^4}, x \in (-\infty; +\infty)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^4 + x^4}}, x \in [-1; 1]$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^6 + x^6}, x \in (-\infty; +\infty)$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n^4 + x^2}}, x \in [-2; 2]$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^5 + x^5}, x \in [0; +\infty)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3nx^2)}{x^2 + 3n^2}, x \in (-\infty; +\infty)$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^3}{2^n (n^5 + x^5)}, x \in [0; +\infty)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}, x \in (-\infty; +\infty)$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2} x^2}{n^5 + x^5}, x \in [0; +\infty)$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + x^2}, x \in [-1; 1]$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\pi nx)}{n\sqrt{n+1}}, x \in (-\infty; +\infty)$

Задача №1.11. Найти область сходимости функционального ряда.

1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$	10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n^2 x^2}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{nx}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x}{x+1} \right)^n$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{2nx^2 + 1} \right)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2^n} \right)$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{x^n + 1}$

6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2x+1}{3x+5} \right)^n$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \arctg^2(nx)}$

Задача №1.12*. (Применение степенных рядов)

(Задача не является обязательной).

Варианты 1-4. Найти производную n -го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 , используя разложения элементарных функций в степенные ряды.

вариант	$f(x)$	n
1	$f(x) = (x-2)^{20} e^{x^2-4x}, x_0 = 2$	27
2	$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 7}, x_0 = -1$	80
3	$f(x) = x^{25} \sin^2 8x, x_0 = 0$	90
4	$f(x) = (x-3)^5 \cdot \arcsin(5x-15), x_0 = 3$	100

Варианты 5-8. Решить задачу Коши, используя теорию рядов.

вариант	
5	$y' = y^2 + x^3, y(0) = \frac{1}{2}$
6	$y'' = xy' - y + e^x, y(0) = 1, y'(0) = 0$
7	$y'' = xy^2 - y', y(0) = 2, y'(0) = 3$
8	$y'' = x \sin(y'), y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}$

Варианты 9-12. Вычислить приближенные значения определенного интеграла с точностью до 10^{-4} , используя теорию рядов.

вариант		вариант	
---------	--	---------	--

9	$\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$	11	$\int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$
10	$\int_0^{0.5} e^{-x^2} dx$	12	$\int_0^{0.2} \frac{\arctg(2x)}{x} dx$

Варианты 13-16. Вычислить сумму числового ряда, используя разложения элементарных функций в степенные ряды.

вариант	
13	$2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$
14	$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$
15	$4 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + \dots$
16	$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$

Задача №1.13.* Вычислить сумму ряда, используя дифференцирование или интегрирование степенного ряда.
(Задача не является обязательной).

1	$1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{n+1}{5^n} + \dots$
2	$\frac{2 \cdot 2}{3} + \frac{4 \cdot 2^3}{3^3} + \frac{6 \cdot 2^5}{3^5} + \dots + \frac{2n \cdot 2^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \dots$
3	$\frac{8^{-2}}{1 \cdot 2} - \frac{8^{-3}}{2 \cdot 3} + \frac{8^{-4}}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{8^{-n-1}}{n \cdot (n+1)} + \dots$
4	$1 + \frac{2 \cdot 2}{3} + \frac{3 \cdot 2^2}{3^2} + \dots + \frac{(n+1) \cdot 2^n}{3^n} + \dots$

5	$\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 2^3}{3^3} + \frac{3 \cdot 2^5}{3^5} + \dots + \frac{n \cdot 2^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \dots$
6	$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{5^{-1}}{2 \cdot 3} + \frac{5^{-2}}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{5^{-n+1}}{n \cdot (n+1)} + \dots$
7	$-\frac{2}{3} + \frac{4}{3^3} - \frac{6}{3^5} - \dots + (-1)^n \frac{2n}{3^{2n-1}} + \dots$
8	$\frac{7 \cdot 9^{-2}}{1 \cdot 2} - \frac{7^2 \cdot 9^{-3}}{2 \cdot 3} + \frac{7^3 \cdot 9^{-4}}{3 \cdot 4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{7^n \cdot 9^{-n-1}}{n \cdot (n+1)} + \dots$
9	$2 - \frac{3 \cdot 2}{4} + \frac{4 \cdot 3}{4^2} - \frac{5 \cdot 4}{4^3} - \dots + (-1)^n \frac{n \cdot (n-1)}{4^{n-2}} + \dots$
10	$1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1) \cdot 3^n} + \dots$
11	$1 - \frac{2 \cdot 5}{7} + \frac{3 \cdot 5^2}{7^2} + \dots + (-1)^n \frac{(n+1)5^n}{7^n} + \dots$
12	$\frac{1}{5} - \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{5^{2n-1}} + \dots$
13	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \dots + \frac{1}{(n+2) \cdot n!} + \dots$
14	$\frac{1}{2} - \frac{2^1}{3 \cdot 1!} + \frac{2^2}{4 \cdot 2!} - \dots + (-1)^n \frac{2^n}{(n+2) \cdot n!} + \dots$
15	$\frac{3^{-1}}{1 \cdot 4} - \frac{3^{-2}}{2 \cdot 5} + \frac{3^{-3}}{3 \cdot 6} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{3^{-n}}{n \cdot (n+3)} + \dots$
16	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$

Задача №1.14. Варианты 1–4. Разложить функцию, заданную на интервале $(0; l)$, в ряд Фурье по синусам. Исследовать сходимость полученного ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье. При по-

мощи полученного разложения вычислить сумму числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Записать равенство Парсеваля, найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$

Варианты 5–8. Разложить функцию, заданную на интервале $(0;l)$, в ряд Фурье по косинусам. Исследовать сходимость полученного ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье. При помощи полученного разложения вычислить сумму числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$

Записать равенство Парсеваля, найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$

Записать равенство Парсеваля, найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$

Варианты 9-12. Разложить в ряд Фурье периодический сигнал $u(t)$ с периодом $T = 2l$. Исследовать сходимость полученного ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье. Найти амплитудный спектр $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, где a_n и b_n - коэффициенты Фурье.

Варианты 13-16. Разложить функцию, заданную на полупериоде $(0;l)$, в ряд Фурье, продолжая ее на интервале $(-l;0)$ функцией, равной нулю. Исследовать сходимость полученного ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье. Записать равенство Парсеваля.

вариант		вариант	
1	$y = 2x - 6, x \in (0;3)$	9	$u(t) = 4t, l = \pi$
2	$y = 4 - 2x, x \in (0;2)$	10	$u(t) = 3t + 1, l = \pi$
3	$y = 3x - 3, x \in (0;1)$	11	$u(t) = 2t , l = \pi$
4	$y = 8 - 2x, x \in (0;4)$	12	$u(t) = 2t + 3, l = \pi$
5	$y = 6 - 4x, x \in (0;3)$	13	$y = 1 - 3x^2, x \in (0;1)$

6	$y = x - 2, x \in (0;4)$	14	$y = \cos \frac{x}{3}, x \in (0;3\pi)$
7	$y = 1 - x, x \in (0;2)$	15	$y = 2 \sin \frac{x}{3}, x \in (0;1,5\pi)$
8	$y = 2x - 5, x \in (0;5)$	16	$y = 2x^2 - 3, x \in (0;2)$

Задачи по ТФКП

Задача №1.15. Заданы два комплексных числа z_1 и z_2 в алгебраической форме.

- 1) Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и показательной формах.
- 2) Вычислить и изобразить $(z_1/z_2)^{10}$.

№	z_1	z_2	№	z_1	z_2
1	$2 + 2i$	$\sqrt{2}$	3	$-\sqrt{3} + i$	$-2i$
2	$2 - 2\sqrt{3}i$	$4i$	4	$-5 - 5i$	i

Задача №1.16. Изобразить на комплексной плоскости область, заданную неравенством или системой неравенств.

1	$1 < z - 2 < 3$	2	$2 < z + 4 - 3i < 3$
3	$\begin{cases} z + i < 1 \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 0 < \operatorname{Re} z < 3 \\ -3 < \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 1 < z \cdot \bar{z} < 4 \\ \operatorname{Im} \bar{z} < 0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} z \cdot \bar{z} < 9 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{3} \end{cases}$
7	$\left \frac{z - 2}{z + 2} \right < 1$	8	$\left \frac{z + i}{z - i} \right > 1$

9	$\begin{cases} (z-1)(\bar{z}-1) < 1 \\ \frac{\pi}{4} < \arg(z-1) < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$	10	$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) < \frac{4}{5}$
11	$\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) > \frac{4}{5}$	12	$ z < 2\operatorname{Re}z$
13	$ z > 1 + \operatorname{Im}z$	14	$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) > 1$
15	$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$	16	$ z < \operatorname{Re}(1+z)$

Задача №1.17. Представить комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

1	$(2-2i)^7$	2	$(-\sqrt{3}-3i)^3$
3	$\left((-1+i)(-3+\sqrt{3}i)\right)^4$	4	$\left((1+i^3)(2-2^5i)\right)^{10}$
5	$\left(-i^7(2-2\sqrt{3}i)\right)^{11}$	6	$\left(i^{11}(-\sqrt{2}-\sqrt{6}i)\right)^{13}$
7	$(-\sqrt{3}-i)^9(1+i^{17})^7$	8	$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

Задача №1.18. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

1	$z^3 - 27 = 0$	3	$z^4 + 16 = 0$
2	$z^3 - 8i = 0$	4	$z^8 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 0$
5	$e^z + 3i = 0$	6	$\cos^2 z - \sin^2 z = 2$

7	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	8	$\sin z = 2$
9	$\cos z = -3$	10	$\operatorname{sh} z = -5$
11	$\operatorname{ch} z = 6$	12	$\cos z - i \sin z = 2$

Задача №1.19. Исследовать функцию $f(z)$ на аналитичность.

№	$f(z)$	№	$f(z)$
1	$4z^2 + 5z - 2i$	2	$e^{6z} + 3z$
3	$iz^2 + 3\bar{z} + 4i$	4	$z \operatorname{Im}(6z + 2)$
5	$ie^{5iz} + z$	6	$ie^{5iz} + 3z^{2018}$
7	$iz^2 + 3\bar{z} + 4i$	8	$ ie^{5iz} + z$
9	$\operatorname{Re}(z^2) + 2z + 5i$	10	$iz \operatorname{Re}(z + i) + \cos 2z$
11	$iz + \sin 2z$	12	$i (1+i)z^2 + \operatorname{Im}(e^{2iz})$
13	$i (1+i\sqrt{3})z^2 + e^{2z}$	14	$iz^2 + 3e^{-z} + 4i$
15	$3i\bar{z} + \operatorname{ch} 2z$	16	$3iz + \operatorname{sh} 2z$
17	$\operatorname{Im}(ie^{5iz}) + 4iz$	18	$\operatorname{ch}(2iz) - i \sin 2z$

Задача №1.20. Получить все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$.

№	z_0	$f(z)$	№	z_0	$f(z)$
1	0	$ze^{\frac{4}{z}}$	2	1	$(z-1)^4 \cos\left(\frac{4}{z-1}\right)$
3	-2	$(z+2) \sin\left(\frac{5}{(z+2)^2}\right)$	4	-2	$\frac{4z+5}{z^2+5z+6}$
5	0	$\frac{z}{(z-2)(z+3)}$	6	-2	$\frac{1}{(z+2)z(z^2-4)}$

7	0	$\frac{z+2}{z^2(z+4)}$	8	2	$\frac{e^z - z}{(z-2)^3}$
9	3	$\frac{z+2}{z^2-9}$	10	0	$\frac{z+2}{z^2(z+4)}$
11	0	$\frac{\sin^2 3z}{z^3}$	12	4	$\frac{z+3}{z^3-16z}$
13	0	$\frac{3iz + sh2z}{z^2}$	14	0	$\frac{z^4 + z + 1}{z^2 + 9}$
15	0	$\frac{e^{3z}}{(z+1)^3}$	16*	0	$\frac{1}{(z+2)^2}$

Задача №1.21. Получить разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ в заданной области.

№		$f(z)$	№		$f(z)$
1	$z_0 = 0,$ $ z > 2$	$\frac{z}{(z-1)(z+2)}$	2	$z_0 = 0,$ $2 < z < 4$	$\frac{2z+1}{z^2+2z-8}$
3	$z_0 = 3,$ $ z-3 > 4$	$\frac{1}{(z+1)(z-2)}$	4	$z_0 = 2,$ $1 < z-2 < 3$	$\frac{4z+5}{z^2-6z+5}$

Задача №1.22. Найти изолированные особые точки функции $f(z)$, указать их тип, вычислить вычеты.

№	$f(z)$	№	$f(z)$
1	$z^5 \cdot e^{\frac{4}{z}}$	2	$(z+3)^6 \sin\left(\frac{5}{z+3}\right)$
3	$\frac{e^{8z}}{z^2+9}$	4	$\frac{z+4}{z^3+3z^2}$

5	$\frac{\sin(\pi z)}{(z-2)(2z+1)}$	6	$\frac{e^z - 1}{z^2(z+4i)}$
7	$z \cdot e^{\frac{1}{z+2}}$	8	$(2z^3 + 1)\cos(1/z)$
9	$\frac{\sin(z+1)}{(z+1)^6}$	10	$\frac{3iz^3 + sh2z}{z^4}$
11	$\frac{\sin^2(3\pi z)}{z^3(z-1)^2}$	12	$\frac{1 + \cos(\pi z)}{(z-1)^3(z-5)^2}$
13	$\sin\left(\frac{\pi z + \pi + 2}{2(z+1)}\right)$	14	$\frac{e^{z+1} - 1}{(z+1)^2 z}$
15	$\frac{\cos(\pi z)}{(z+2)^2(2z-1)}$	16	$\frac{e^z - 1}{(z-2\pi i)^2 z}$
17	$z^5(ch(1/z) - \cos(1/z))$	18	$(z^2 + 6z)\sin\left(\frac{2}{z+3}\right)$

Задача №1.23. Вычислить интеграл $\oint_L f(z)dz$ с помощью основной

теоремы о вычетах.

№	$f(z)$	L	№	$f(z)$	L
1	$\frac{\sin z}{z(z^2 + 9)}$	$ z - i = 3$	2	$\frac{1}{(z+2)(z^2 - 4)}$	$ z + 2 = 1$
3	$\frac{e^z}{z^2(z+2i)}$	$ z + i = 2$	4	$\frac{z}{\sin z}$	$ z + 2 = 3$
5	$\frac{z+2}{(z^2 + 4)^2}$	$ z - i = 2$	6	$\frac{z}{e^{2z} - 1}$	$ z - i = 3$
7	$\frac{\sin^2 2z}{z^3(2z - \pi)}$	$ z = 2$	8	$\frac{\sin \pi z}{z^3 - z^2}$	$ z - 1 = 2$

9	$\frac{\cos(\pi z)}{z^2(4z^2-1)}$	$ 2z-1 = \frac{1}{2}$	10	$\frac{e^z}{z(z+2)^2}$	$ z+1 =2$
11	$\frac{1-\cos(\pi z)}{z^3(z+2)}$	$ 2z+1 =4$	12	$\frac{1-\cos z}{z^2(z^2+4)}$	$ z-i =2$
13	$\frac{iz^3+sh2z}{z^4}$	$ z-i =2$	14	$\frac{2z+1}{\cos \pi z}$	$ z =1$
15	$\frac{e^{i\pi z}-1}{(z+2)z^2}$	$ z+1 =2$	16	$(z^2+3z+5)e^{\frac{1}{z}}$	$ z-i =2$

Задача №1.24. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью вычетов.

№	$f(x)$	(a,b)	№	$f(x)$	(a,b)
1	$\frac{x^2+1}{(x^2+9)(x^2+16)}$	$(0,+\infty)$	2	$\frac{x^2}{(x^2+9)^2}$	$(0,+\infty)$
3	$\frac{1}{x^2+6x+13}$	$(-\infty,+\infty)$	4	$\frac{1}{(x^2+4)^3}$	$(0,+\infty)$
5	$\frac{1}{(x^2-4x+13)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	6	$\frac{x^2}{x^4+6x^2+5}$	$(0,+\infty)$
7	$\frac{2x-3}{(x^2-4x+8)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	8	$\frac{1}{x^4+1}$	$(0,+\infty)$
9*	$\frac{\cos 2x}{(x^2+1)^2}$	$(-\infty,+\infty)$	10*	$\frac{x \sin 2x}{x^2+9}$	$(0,+\infty)$
11*	$\frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+9)}$	$(0,+\infty)$	12*	$\frac{\cos 2x}{x^4+6x^2+5}$	$(-\infty,+\infty)$

ЧАСТЬ 2

Типовой расчет

Решение задач типового расчета позволяет успешно подготовиться к выполнению контрольных работ и к сдаче экзамена. *Наличие выполненного типового расчета является необходимым условием допуска студента к сдаче экзамена по курсу.*

Весь теоретический материал, необходимый для выполнения типового расчета, представлен в части 3.

Задача №2.1. Исследовать на сходимость числовой ряд.

вариант		вариант	
1	$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \cdot \left(\frac{6n+7}{6n+4}\right)^{n^2}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)!}{(2n)!}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (e^{\frac{8}{n}} - 1)$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{8^n - n^2}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n \cdot (7 \ln n + 4)^5}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+5)}{n+5}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1 - \cos(\frac{5}{n+2}))$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^4 n}{(3n+5) \cdot \sqrt[5]{32n^2+1}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} (1 - \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}))$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)^2}{n(n+4)\sqrt{9n+5}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^3+2n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+5}{n+2}\right)$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+2) \cdot \sqrt[5]{\ln(n+2)}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} 12^{-n} \left(\frac{2n+5}{2n+1}\right)^{n^2}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n+1)^n}{3^{n^2+n}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+5}}{n!}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+2}}$

10	$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} (n+4) \arcsin\left(\frac{1+2n}{n^4 \cdot \sqrt{4n^2+5}}\right)$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n+3}{5n-4}\right)^{\frac{n}{3}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{n}+5}\right)^{n\sqrt{n}}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+9}}{(8n+1)\sqrt{9n+15}}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} (3n+2)^5 (10^{\frac{9}{n^5}} - 1)$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{(6n+4)\sqrt{n}}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{3}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{\sqrt{n+2}}\right)$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{(n+5) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+5)}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+7) \operatorname{tg}^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\right)$

Задача №2.2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости.

вариант		вариант	
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+5}\right)^{3n} (x+4)^n$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-7)^n}{\sqrt{9n^2+1}}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n+1}}{n \cdot 2^n \cdot \sqrt{n+1}}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3^n n \sqrt{n+1}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+10)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{\sqrt{n \cdot (n^2+1)}}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+100)^n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} x^n$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} (x+7)^n$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^n (x+1)^n$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n \left(1 - \cos\left(\frac{2}{n^4}\right)\right)$

7	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+17)^n}{(2n+1) \cdot \ln(2n+1)}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n(n+1)} (x+1)^n$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! (x+5)^n}{n^3 + 2}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \ln \frac{n+3}{n+1}$	24	$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+11)^n}{n \cdot 2^n \ln n}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{2^n (n^2 + 1)} (x-5)^n$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} (x+3)^n \sin\left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln\left(\frac{n+3}{n}\right) (x+2)^n$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n n \cdot (e^{\frac{3}{n}} - 1)$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{3n+12}}$	27	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n \cdot \ln^3 n}$
13	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \left(x + \frac{1}{3}\right)^n}{n \ln^2(n)}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n \operatorname{actg}\left(\frac{5}{n}\right)$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}} (x-2)^n$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n \sin^4\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{4}{5n+1}\right)$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n+6)(\ln(n+6))^{10}}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n(n^4 + 3)}}$

Задача №2.3*. Пользуясь теоремой Вейерштрасса, доказать, что функциональный ряд сходится равномерно в указанной области.
(Задача не является обязательной, включается в типовой расчет по указанию преподавателя).

вариант		вариант	
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n x)}{n \sqrt{n+x}}, x \in [0; +\infty)$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, x \in [0; +\infty)$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{x}{n}, x \in [0; \pi]$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^4 + x^4}, x \in (-\infty; +\infty)$

3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{e^n + n^2 x^2}, x \in (-\infty; +\infty)$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^4 + x^4}, x \in (-\infty; +\infty)$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^4 + x^4}}, x \in [-1; 1]$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^2}{n^6 + x^6}, x \in (-\infty; +\infty)$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n^4 + x^2}}, x \in [-2; 2]$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^5 + x^5}, x \in [0; +\infty)$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(3nx^2)}{x^2 + 3n^2}, x \in (-\infty; +\infty)$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^3}{2^n (n^5 + x^5)}, x \in [0; +\infty)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n}}, x \in (-\infty; +\infty)$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2} x^2}{n^5 + x^5}, x \in [0; +\infty)$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 + x^2}, x \in [-1; 1]$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\pi nx)}{n\sqrt{n+1}}, x \in (-\infty; +\infty)$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, x \in [-1; 1]$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(nx)}{x^2 + n^3}, x \in (-\infty; +\infty)$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \left(x^n + \frac{1}{x^n} \right), x \in \left[\frac{1}{2}; 2 \right]$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(2nx)}{n\sqrt{n^4 + 1}}, x \in (-\infty; +\infty)$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3 + x^3}, x \in [0; +\infty)$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^n}{n^3}\right), x \in [0; 1]$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{3^n (1 + n^2 x^2)}, x \in (-\infty; +\infty)$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)\sin^2(nx)}{n\sqrt{n+1}}, x \in [-3; 0]$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^3}{n^6 + x^6}, x \in (-\infty; +\infty)$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{n} \right)^n, x \in [3; 5]$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{n^6 + x^6}, x \in (-\infty; +\infty)$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + x \right)^{-n}, x \in [2; 3]$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\arctg(nx)}{x^2 + n^3}, x \in (-\infty; +\infty)$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} 7x^2 e^{-nx}, x \in [0; +\infty)$

Задача №2.4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 . Указать область сходимости полученного ряда.

Указание. Использовать разложения элементарных функций в степенные ряды.

вариант		вариант	
1	$y = (x + 4)^3 e^{-3x+5}, x_0 = -4$	16	$y = \frac{(x + 5)^3}{8x - 1}, x_0 = -5$
2	$y = (3x^2 + x + 1)e^{2x-1}, x_0 = 0$	17	$y = (x - 5)^2 e^{3x-4}, x_0 = 5$
3	$y = e^{-x^2+6x}, x_0 = 3$	18	$y = 6 \cdot \operatorname{ch}(5x), x_0 = 0$
4	$y = (1 - x)^5 e^{-3x+4}, x_0 = 1$	19	$y = 8 \cdot \operatorname{sh}(7x), x = 2$
5	$y = (x + 7)^3 \operatorname{tg}(x + 7), x_0 = -7$	20	$y = (x + 4) \ln(3 - 2x), x_0 = -4$
6	$y = \frac{x}{4x^2 + 3}, x_0 = 0$	21	$y = \ln(2x^2 + 3x - 2), x_0 = 1$
7	$y = 4 \sin^2(3x^2) + 6x^7, x_0 = 0$	22	$y = (x - 2)^5 \operatorname{tg}(x - 2), x_0 = 2$
8	$y = \frac{2x - 3}{x^2 + 5x + 6}, x_0 = -1$	23	$y = \ln\left(\frac{2 + x}{2 - x}\right), x_0 = -1$
9	$y = x^2 \sin 9x \cdot \cos 9x, x_0 = 0$	24	$y = \frac{(x - 2)^2}{3x + 7}, x_0 = 2$
10	$y = x^5 \cos^2(3x), x_0 = 0$	25	$y = x \cdot (1 - \sin^2 6x), x_0 = 0$
11	$y = \frac{3x + 2}{x^2 + 2x - 3}, x_0 = -2$	26	$y = 8x^4 \arcsin(2x), x_0 = 0$
12	$y = \sin^4 x, x_0 = 0$	27	$y = \sqrt{1 + 3x^2}, x_0 = 0$
13	$y = x^3 \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x_0 = 0$	28	$y = (x - 4)^3 \ln(3x + 18), x_0 = 4$
14	$y = x^4 e^{5x^3+2}, x_0 = 0$	29	$y = 5x^3 \operatorname{arctg}(4x), x_0 = 0$
15	$y = (x - 7)^5 e^{-3x+4}, x_0 = 7$	30	$y = \frac{(x - 4)^3}{5x - 1}, x_0 = 4$

Задача №2.5. Разложить функцию $y = f(x)$, заданную на полу-периоде $(0; l)$, в ряд Фурье по косинусам для четных вариантов и по синусам для нечетных вариантов. Исследовать сходимость полученного ряда Фурье. Нарисовать график суммы ряда Фурье.

№	$f(x)$	l	№	$f(x)$	l
1	$y = 1 - 3x$	1	16	$y = 4x + 1$	2
2	$y = 4 + 4x$	2	17	$y = 3x - 1$	1
3	$y = 1 + 2x$	3	18	$y = 3x + 3$	2
4	$y = 1 - x$	4	19	$y = 2 - 2x$	2
5	$y = 4 - 4x$	2	20	$y = 3 - 3x$	1
6	$y = 3x + 2$	3	21	$y = 3x + 1$	2
7	$y = 4 - 2x$	1	22	$y = 2 - 4x$	1
8	$y = 1 - 2x$	4	23	$y = 2 + 2x$	4
9	$y = 4x - 1$	4	24	$y = 4x + 3$	1
10	$y = 2 - 3x$	3	25	$y = 2x - 2$	2
11	$y = 4x - 3$	2	26	$y = 3x - 2$	2
12	$y = 1 + x$	1	27	$y = 4x + 2$	1
13	$y = 2x - 1$	2	28	$y = 4x - 2$	2
14	$y = 1 - 4x$	1	29	$y = 3 - 4x$	1
15	$y = x - 1$	4	30	$y = 3x - 3$	2

Задача №2.6. Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

вариант		вариант	
1	$z^6 - 4z^3 + 3 = 0$	16	$z^4 + 8iz^2 - 16 = 0$
2	$e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$	17	$\sin z = -3i$
3	$z^4 - 4z^2 + 5 = 0$	18	$z^4 + 2z^2 + 4 = 0$
4	$e^{4z} + 2e^{2z} + 4 = 0$	19	$\cos z = 2i$
5	$e^{8z} + 8ie^{4z} - 16 = 0$	20	$\operatorname{sh} z = -4i$

6	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	21	$z^8 + 10iz^4 - 25 = 0$
7	$z^6 + 16z^3 + 64 = 0$	22	$tg z = -2i$
8	$\sin z = 2$	23	$e^{6z} + 14ie^{3z} - 49 = 0$
9	$z^8 + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = 0$	24	$\text{th } z = 3$
10	$\cos z = -3$	25	$z^4 - 2iz^2 - 1 = 0$
11	$z^6 + i \frac{2+i}{1-2i} = 0$	26	$z^6 - 2iz^3 + 2 = 0$
12	$\text{sh } z = -5$	27	$\sin 3z \cos 3z = 4$
13	$z^4 - z^2 + 1 = 0$	28	$\cos^2 3z - \sin^2 3z = 2$
14	$\text{ch } z - 6 = 0$	29	$\text{sh}^2 z - \text{ch}^2 z = 3$
15	$\cos 8z = 2$	30	$\text{ch } 9z = 6$

Задача №2.7. Исследовать функцию $f(z)$ на аналитичность.

№	$f(z)$	№	$f(z)$
1	$f(z) = ie^{3z-i^2}$	16	$f(z) = z^2 + 5\bar{z} - 7i$
2	$f(z) = ie^{2z} - (z-i)^2$	17	$f(z) = i\bar{z} \cdot \text{Im}(2z)$
3	$f(z) = \text{sh } 2z + i$	18	$f(z) = \frac{i}{z} + z^2$
4	$f(z) = (iz)^2 + 5z + 3i$	19	$f(z) = z z + i$
5	$f(z) = ie^{(iz-1)}$	20	$f(z) = \bar{z}e^z + iz^2$
6	$f(z) = \text{ch } 3z - i$	21	$f(z) = z\bar{z} + z^2 + 4$
7	$f(z) = 3z^2 - 4z + 2i$	22	$f(z) = \text{sh } iz + \text{Re } z$

8	$f(z) = ie^{5z} + z$	23	$f(z) = i z - z^2$
9	$f(z) = iz \cdot \operatorname{Re} 5z$	24	$f(z) = -iz^3 + 2i$
10	$f(z) = (z + 2) \cdot \operatorname{Im} 3z$	25	$f(z) = \frac{\operatorname{Re} 2z}{z}$
11	$f(z) = i(z + i)^2 - 4z$	26	$f(z) = \frac{\operatorname{Im}(5z + 3)}{z}$
12	$f(z) = ze^{-3z} - i$	27	$f(z) = \frac{4}{z} - \operatorname{Im} z$
13	$f(z) = (3z - 2i) \operatorname{Im}(z + i)$	28	$f(z) = (2z + 5i) \operatorname{Re} z$
14	$f(z) = \cos iz - \operatorname{ch} z$	29	$f(z) = \frac{z}{ z } i$
15	$f(z) = 6z^3 - iz^2 + 6z$	30	$f(z) = z \operatorname{Im}(iz^2 + 3z)$

Задача №2.8. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)$, установить их тип и найти вычеты в особых точках.

№	$f(z)$	№	$f(z)$
1	$f(z) = \frac{z^3}{z^4 - 1}$	16	$f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z-2}}$
2	$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$	17	$f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \sin \frac{1}{z} \right)$
3	$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$	18	$f(z) = \frac{1}{z + z^2}$
4	$f(z) = \frac{z + 1}{z^4 - 16}$	19	$f(z) = \frac{1}{(1 - z)^3(z + 2)^2}$

5	$f(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+2}}$	20	$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$
6	$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^2+1)}$	21	$f(z) = \frac{1}{z^5-4z^3}$
7	$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-1)^3}$	22	$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2(z+1)}$
8	$f(z) = \frac{\cos z-1}{z^2(z^2-4)}$	23	$f(z) = \frac{z^3+1}{(z+3)^2(z+1)}$
9	$f(z) = z^3 \left(1 - \cos \frac{1}{z}\right)$	24	$f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z^2(z+1)}$
10	$f(z) = \frac{1}{z^3} \cos \frac{1}{z}$	25	$f(z) = \frac{1}{z(1-e^{2z})}$
11	$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+4)(z-1)}$	26	$f(z) = \frac{1}{z^4-z^2}$
12	$f(z) = \frac{\sin(z-3)}{(z-3)^3(z+4)^3}$	27	$f(z) = \frac{\cos(z-5)-1}{(z-5)^3(z+3)}$
13	$f(z) = \frac{\sin(z-1)}{(z-1)^3(z+4)^3}$	28	$f(z) = \frac{1}{z-3} e^{\frac{1}{z-3}}$
14	$f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{(z-1)^3}}$	29	$f(z) = \frac{1-e^{z-2}}{(z-2)(z+3)^3}$
15	$f(z) = \frac{\cos 5z-1}{z^3(z^2+9)}$	30	$f(z) = (2-z)^3 e^{\frac{4}{z-2}} + \frac{3}{(z-2)^4}$

Задача №2.9. Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\int_C f(z) dz$ с помощью основной теоремы о вычетах.

№	$f(z)$	C
1	$\frac{\cos \pi z}{(2z - 1)^2}$	$ z = 1$
2	$\frac{z}{\operatorname{sh}^2 \pi z}$	$ z = \frac{1}{2}$
3	$\frac{\operatorname{sh} \pi z}{(z + 4)(z^2 + 4)}$	$ z = 5$
4	$\frac{1}{z^4 + 16}$	$ z - 2 = 2$
5	$\frac{z}{z^3 + 8}$	$ z - 2 = 2\sqrt{2}$
6	$\frac{2z - 1}{\cos^2 \pi z}$	$\left z - \frac{1}{2}\right = \frac{1}{2}$
7	$\frac{e^z}{z(z^2 + 2z + 5)}$	$ z + 1 - 2i = 1$
8	$\frac{\sin 2z}{z^2(z^2 + 4)}$	$ z = 1$
9	$\frac{\sin z}{z^2(z - 2)^2}$	$ z = 1$
10	$\frac{z^3}{z^4 - 1}$	$ z + 1 = 1$
11	$\frac{z}{(z - 1)(z - 2)^2}$	$ z - 2 = \frac{1}{2}$
12	$\frac{\cos z}{z^3 - z^2 - 2z}$	$ z + 1 = 2$
13	$\frac{\operatorname{sh} z}{z(z^2 + 2z + 5)}$	$ z + 1 + 2i = 1$

14	$\frac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$ z = 2$
15	$\frac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$ z = \frac{1}{2}$
16	$\frac{e^z}{z^4 + 8z^2 - 9}$	$ z = 2$
17	$\frac{e^z}{z(z - \pi i)}$	$ z - 3i = 1$
18	$\frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$ z = 2$
19	$\frac{e^z}{z^3(z-2)^2}$	$ z-2 = 1$
20	$\frac{e^z}{(z-1)^2 z}$	$ z-2 = \frac{3}{2}$
21	$\frac{z}{z^4 + 1}$	$(x-1)^2 + \frac{y^2}{8} = 1$
22	$\frac{1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$ z+2 = 1$
23	$\frac{z}{\cos z}$	$\left z - \frac{\pi}{2}\right = \frac{\pi}{2}$
24	$\frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^2(z+2)(z-1)}$	$ z+1 = \frac{3}{2}$
25	$\frac{z^2 + 1}{\operatorname{sh} 2z}$	$\left z - \frac{\pi i}{2}\right = 1$
26	$\frac{4}{\operatorname{ch} z}$	$ z = 2$
27	$\frac{1}{(z^2 + 4)^3}$	$\frac{(y-1)^2}{4} + x^2 = 1$

28	$\operatorname{ctg} 3z$	$\left z - \frac{\pi}{2}\right = 1$
29	$\frac{3z}{\sin z}$	$ z - \pi = 5$
30	$\frac{e^{8z} - 1}{6z^2(z^2 + 1)}$	$ z + i = \frac{5}{2}$

Задача №2.10. Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с помощью вычетов.

№	$f(x)$	(a, b)
1	$\frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$	$(0, +\infty)$
2	$\frac{(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$	$(-\infty, +\infty)$
3	$\frac{x - 3}{x^4 + 5x^2 + 4}$	$(-\infty, +\infty)$
4	$\frac{x + 1}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}$	$(-\infty, +\infty)$
5	$\frac{x + 2}{(x^2 + 16)(x^2 + 1)}$	$(-\infty, +\infty)$
6	$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}$	$(-\infty, +\infty)$
7	$\frac{x - 1}{x^4 + 37x^2 + 36}$	$(-\infty, +\infty)$
8	$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$	$(-\infty, +\infty)$

9	$\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$	$(0, +\infty)$
10	$\frac{x + 3}{x^4 + 5x^2 + 4}$	$(-\infty, +\infty)$
11	$\frac{1}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}$	$(-\infty, +\infty)$
12	$\frac{x + 4}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)}$	$(-\infty, +\infty)$
13	$\frac{1}{(x^2 + 1)^3}$	$(0, +\infty)$
14	$\frac{(x^2 + 1)}{(x^2 + 9)(x^2 + 16)}$	$(-\infty, +\infty)$
15	$\frac{x - 5}{(x^2 + 16)(x^2 + 1)}$	$(-\infty, +\infty)$
16	$\frac{x^2}{x^4 + 10x^2 + 9}$	$(0, +\infty)$
17	$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^3}$	$(0, +\infty)$
18	$\frac{x^2 + 5}{x^4 + 26x^2 + 25}$	$(-\infty, +\infty)$
19	$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12}$	$(-\infty, +\infty)$
20	$\frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 16)}$	$(-\infty, +\infty)$
21	$\frac{x^2}{x^2 + 5x^2 + 4}$	$(0, +\infty)$
22	$\frac{x^2}{x^4 + 29x^2 + 100}$	$(0, +\infty)$

23	$\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$	$(-\infty, +\infty)$
24	$\frac{x^2}{(x^2 + 25)(x^2 + 9)}$	$(-\infty, +\infty)$
25	$\frac{x + 6}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$	$(-\infty, +\infty)$
26	$\frac{1}{(x^2 + 1)^4}$	$(-\infty, +\infty)$
27	$\frac{2x^2 + 13x}{x^4 + 13x^2 + 36}$	$(-\infty, +\infty)$
28	$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12}$	$(-\infty, +\infty)$
29	$\frac{6}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)}$	$(0, +\infty)$
30	$\frac{x^2}{(x^2 + 81)(x^2 + 16)}$	$(0, +\infty)$

ЧАСТЬ 3

Основные определения и теоремы курса, примеры решения задач

Подробно содержание *части 3* по теме «Теория рядов» изложено в учебном пособии:

Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. «Ряды. Интеграл и преобразование Фурье. Приложения». М.: МИРЭА, 2015.